



**AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA
IM. STANISŁAWA STASZICA W KRAKOWIE**

WYDZIAŁ ELEKTROTECHNIKI, AUTOMATYKI,
INFORMATYKI I ELEKTRONIKI

Dariusz Jamróz

**WIZUALIZACJA OBIEKTÓW W PRZESTRZENIACH
WIELOWYMIAROWYCH**

ROZPRAWA DOKTORSKA

Promotor:

prof. zw. dr hab. inż. Ryszard Tadeusiewicz

Kraków 2001

*Składam serdeczne podziękowania
Panu profesorowi Ryszardowi Tadeusiewiczowi
za opiekę naukową oraz cenne wskazówki
z których mogłem korzystać w trakcie
powstawania pracy.*

SPIS TREŚCI

1. WSTĘP	5
1.1. TEMATYKA	5
1.2. TEZA.....	5
1.3. CELE.....	5
1.4. ZAWARTOŚĆ PRACY.....	6
2. PROBLEM ANALIZY OBIEKTÓW W PRZESTRZENIACH WIELOWYMIAROWYCH (PRZEGLĄD LITERATURY)	8
2.1. METODA GRAND TOUR.....	8
2.2. METODA GŁÓWNYCH SKŁADOWYCH (PCA).....	10
2.3. METODY WYKORZYSTUJĄCE SIECI NEURONOWE	11
2.3.1. <i>AUTOASOCJACYJNE SIECI NEURONOWE</i>	11
2.3.2. <i>SIECI KOHONENA</i>	13
2.4. METODA OSI RÓWNOLEGŁYCH.....	14
2.5. OBRAZ RADAROWY	15
2.6. SKALOWANIE WIELOWYMIAROWE	16
2.7. METODA SCATTERPLOT MATRICES	17
2.8. MAPA ODNIESIENIA	18
2.9. OBSZARY MOZAIKOWE	19
3. KONCEPCJA „PATRZENIA W PRZESTRZENIACH WIELOWYMIAROWYCH”	21
3.1. WPROWADZENIE	21
3.2. MODEL MATEMATYCZNY.....	22
3.3. PRZYKŁADY BRYŁ	32
4. IMPLEMENTACJA SYSTEMU DO WIZUALIZACJI OBIEKTÓW WIELOWYMIAROWYCH (BRYŁ WYPUKŁYCH)	37
4.1. PROJEKT SYSTEMU	37
4.1.1. <i>STRUKTURY DANYCH</i>	37
4.1.2. <i>ZMIANA PUNKTU WIDZENIA W PRZESTRZENI n-WYMIAROWEJ</i>	38
4.1.3. <i>RYSOWANIE BRYŁY</i>	39
4.2. SPOSÓB UŻYTKOWANIA.....	41
4.2.1. <i>DANE WEJŚCIOWE</i>	41
4.2.2. <i>PARAMETRY</i>	42
4.2.3. <i>FUNKCJE KŁAWISZY</i>	43
4.2.4. <i>OKNO TEKSTOWE</i>	46
4.2.5. <i>OKNO GRAFICZNE</i>	46
5. PROBLEM WIZUALIZACJI WIELOWYMIAROWYCH ZBIORÓW DANYCH DYSKRETNYCH	47
5.1. ROZPOZNAWANIE OBRAZÓW	47
5.2. EKONOMIA.....	49
5.2.1. <i>OCENA KONDYCJI FIRMY</i>	49
5.2.2. <i>SEGMENTACJA RYNKU</i>	49
5.2.3. <i>WYKRYWANIE LUKI NA RYNKU</i>	50
5.2.4. <i>WYKRYWANIE NIETYPOWYCH ZACHOWAŃ KLIENTÓW</i>	50
5.3. WYSTĘPOWANIE ZŁÓŻ.....	51

6. METODA WIZUALIZACJI WIELOWYMIAROWYCH DANYCH DYSKRETNYCH.....	52
6.1. WPROWADZENIE	52
6.2. MODEL MATEMATYCZNY	54
6.3. PRZYKŁADY ZBIORÓW DANYCH DYSKRETNYCH.....	61
6.3.1 KOSTKI 7-WYMIAROWE Z ZAKŁÓCENIEM.....	61
6.3.2 KULA 7-WYMIAROWA W “SFERZE” 7-WYMIAROWEJ KTÓRA SIĘ ZNAJDUJE W DRUGIEJ “SFERZE” 7-WYMIAROWEJ.....	63
6.3.3 WALEC 7-WYMIAROWY I DWIE “PÓLSFERY” 7-WYMIAROWE Z CYLINDRAMI 7-WYMIAROWYMI.....	66
6.3.4 TRZY OBEJMUJĄCE SIĘ TORUSY 5-WYMIAROWE	68
7. IMPLEMENTACJA SYSTEMU DO WIZUALIZACJI WIELOWYMIAROWYCH DANYCH DYSKRETNYCH	73
7.1. PROJEKT SYSTEMU	73
7.1.1. STRUKTURY DANYCH	73
7.1.2. ZMIANA PUNKTU WIDZENIA W PRZESTRZENI n -WYMIAROWEJ	74
7.1.3. RYSOWANIE PUNKTÓW	74
7.1.4. USUWANIE PUNKTÓW.....	77
7.2. SPOSÓB UŻYTKOWANIA.....	77
7.2.1. DANE WEJŚCIOWE.....	78
7.2.2. PARAMETRY.....	79
7.2.3. FUNKCJE KŁAWISZY	80
7.2.4. USUWANIE PUNKTÓW.....	81
7.2.5. OKNO TEKSTOWE.....	83
7.2.6. OKNO GRAFICZNE.....	83
7.2.7. POŁĄCZENIE SYSTEMÓW.....	83
8. PODSUMOWANIE I WNIOSKI	84
8.1. ZREALIZOWANE ZADANIA	84
8.2. WYNIKI DOŚWIADCZEŃ.....	84
LITERATURA	86
DODATEK A.....	89

1. WSTĘP

1.1. TEMATYKA

W wielu problemach spotykamy się z potrzebą analizy wielowymiarowych danych. Następuje to zawsze wtedy, gdy dany problem związany jest z bardzo złożoną rzeczywistością, którą można rozpatrywać w wielu aspektach, płaszczyznach, z użyciem wielu zmiennych. W celu opisu i analizy takiej rzeczywistości, każdy z jej aspektów, płaszczyzn czy zmiennych traktuje się jako osobny wymiar pewnej wielowymiarowej przestrzeni. Dla konkretnych zastosowań konstruuje się algorytmy potrafiące analizować taki wielowymiarowy problem w sposób ilościowy. Jednak w wielu sytuacjach jeśli nie konieczna to na pewno korzystna byłaby także możliwość pogładowej, jakościowej oceny struktury analizowanych wielowymiarowych danych. Na przykład jakościowa ocena wielowymiarowej przestrzeni cech wykorzystywanej w klasycznych metodach rozpoznawania obrazów, mogłaby pomóc w wyborze metody rozpoznawania. Natomiast możliwość pogładowej oceny wielowymiarowych danych ekonometrycznych, mogłaby pomóc w ocenie obrazu sytuacji ekonomicznej przedsiębiorstwa.

Najbardziej naturalnym, wykorzystywanym właśnie w celach obserwacji jakościowych źródłem informacji dla człowieka jest zmysł wzroku. Z tego powodu celowe staje się wykorzystanie wzroku do próby obserwacji obiektów w przestrzeniach wielowymiarowych. Aby to umożliwić postanowiono w tej pracy stworzyć odpowiedni model matematyczny, rozwiązujący problem wizualizacji wielowymiarowych brył wypukłych oraz wielowymiarowych zbiorów danych dyskretnych.

1.2. TEZA

Stosując zaproponowane w pracy metody matematyczne można wizualizować na ekranie komputera obiekty zdefiniowane formalnie lub empirycznie w przestrzeniach wielowymiarowych, co pozwala na jakościową ocenę struktury danych wielowymiarowych.

1.3. CELE

W celu udowodnienia postawionej tezy należy zrealizować następujące punkty:

1) Opracowanie modelu matematycznego rozwiązującego problem wizualizacji wielowymiarowych brył wypukłych oraz wielowymiarowych zbiorów danych dyskretnych.

Ponieważ zmysł wzroku u człowieka służy jedynie do obserwacji przestrzeni trójwymiarowej, należy dokładnie sprecyzować sposób w jaki należy „patrzeć” w wielowymiarowej przestrzeni. Sprowadza się to do zdefiniowania mechanizmów i metod rzutowania takiej przestrzeni na odpowiednią płaszczyznę (ekran obserwacyjny). Ponieważ rozwiązanie omawianego problemu wymyka się naszemu ludzkiemu doświadczeniu, koniecznym jest stworzenie silnego formalizmu, opisującego i rozwiązującego ten problem. Każdą najdrobniejszą własność potrzebną do dalszych rozważań należy formalnie udowodnić, mimo pozornej oczywistości niektórych faktów. Zagadnienie to będzie wyczerpująco przedstawione w tej pracy.

2) Budowa systemu pozwalającego wizualizować wielowymiarowe bryły wypukłe oraz wielowymiarowe zbiory danych dyskretnych z pomocą grafiki komputerowej.

System taki powinien powstać w oparciu o stworzony model matematyczny. Powinien on umożliwiać:

- przechowywanie w pamięci komputera opisu wielowymiarowych obiektów,
- wybór punktu widzenia obserwowanych obiektów poprzez przemieszczanie wirtualnego obserwatora w wielowymiarowej przestrzeni,
- rysowanie na ekranie komputera wielowymiarowego obiektu widzianego z danego miejsca przestrzeni, zgodnie z zasadami opracowanymi przez autora pracy.

3) Przeprowadzenie doświadczeń, polegających na przedstawieniu na ekranie komputera przykładowych wielowymiarowych brył wypukłych oraz wielowymiarowych zbiorów danych dyskretnych ze wskazaniem korzyści, jakie można odnieść z ich wizualizacji.

Oczekujemy, że w wyniku przeprowadzonych doświadczeń powinny zostać zauważone pewne jakościowe cechy obserwowanych obiektów, pozwalające na jakościową ocenę struktury obserwowanych danych wielowymiarowych.

1.4. ZAWARTOŚĆ PRACY

Rozprawa przedstawia opracowany oryginalny model matematyczny procesu „patrzenia” i „widzenia” w przestrzeni wielowymiarowej w oparciu o który powstał system, pozwalający wizualizować wielowymiarowe bryły wypukłe oraz wielowymiarowe zbiory danych dyskretnych. Pokazano na przykładach rezultaty przeprowadzonej, przy pomocy tej wizualizacji, jakościowej analizy wielowymiarowych danych. Praca zawiera osiem rozdziałów, bibliografię oraz dodatek. W rozdziale pierwszym przedstawiono tematykę, tezę oraz cele rozprawy.

Drugi rozdział zawiera przegląd literatury związanej z wizualizacją wielowymiarowych danych. Literatura ta (do której udało się dotrzeć) jest raczej uboga, więc nie stanowiła ona podstawy do tworzenia systemu opisanego w tej pracy.

Trzeci rozdział przedstawia opracowany przez autora model matematyczny, rozwiązujący problem wizualizacji wielowymiarowych brył wypukłych. Zawiera on również przykłady wyglądu brył wielowymiarowych, uzyskane z wykorzystaniem przedstawionego modelu. W opisywanych przykładach zwrócono uwagę na pewne zauważone cechy jakościowe obserwowanych brył. Jak się wydaje, spostrzeżenia te nie były nigdzie do tej pory przytaczane (przynajmniej autor przedstawianej pracy nie spotkał ich w dostępnej literaturze), można więc przypuszczać, że przynajmniej część z tych spostrzeżeń wzbogaca – w jakimś stopniu – zasób wiedzy na temat właściwości obiektów w przestrzeniach wielowymiarowych.

Czwarty rozdział poświęcono implementacji proponowanego w pracy systemu do wizualizacji obiektów wielowymiarowych. Opisano w nim projekt oraz sposób użytkowania stworzonego systemu, który umożliwia oglądanie z różnych stron wyglądu wielowymiarowych brył wypukłych.

Piąty rozdział przedstawia przykłady zagadnień wymagających jakościowego analizowania zbiorów danych wielowymiarowych.

Szósty rozdział zawiera model matematyczny rozwiązujący problem wizualizacji wielowymiarowych zbiorów danych dyskretnych. Przedstawiono przykłady wyglądu wielowymiarowych zbiorów punktów, uzyskane z wykorzystaniem przedstawionego modelu. Opisano pewne zauważone cechy jakościowe obserwowanych wielowymiarowych danych dyskretnych. Także i te obserwacje wydają się być w pełni oryginalne.

Siódmy rozdział poświęcono implementacji systemu do wizualizacji wielowymiarowych danych dyskretnych. Opisano w nim projekt oraz sposób użytkowania tego systemu, który umożliwia oglądanie z różnych stron wyglądu zbiorów wielowymiarowych danych dyskretnych, przezwyciężając przy tym pewne specyficzne trudności tego zadania.

W ósmym rozdziale zawarto podsumowanie i wnioski.

2. PROBLEM ANALIZY OBIEKTÓW W PRZESTRZENIACH WIELOWYMIAROWYCH (PRZEGLĄD LITERATURY)

2.1. METODA GRAND TOUR

Jedną z metod służących do wizualizacji wielowymiarowych danych jest przedstawiona w pracy [26] metoda *grand tour*. Pierwszy opisał ją Asimov w pracy [2], następnie została rozwinięta w pracach [6], [18], [35], [12] i [7]. Metoda ta została wykorzystana w pakietach graficznych XGobi [30], ExplorN [9] oraz Xplore [15], służących do wizualizacji wielowymiarowych danych.

Grand tour jest ciągłą, jednoparametrową rodziną d -wymiarowych projekcji n -wymiarowych danych. Elementy tej rodziny wybrane zostają spośród wszystkich d -wymiarowych projekcji z R^n . Przyjmując $d=2$ metoda ta pozwala oglądać wielowymiarowe dane na ekranie komputera poprzez sekwencje projekcji na dwuwymiarowe podprzestrzenie. Dla $d=3$ metoda ta pozwala oglądać wielowymiarowe dane poprzez przedstawienie na ekranie komputera sekwencji projekcji, będących trójwymiarowymi podprzestrzeniami. Algorytm *grand tour* realizuje po prostu animację odpowiednio wybranych projekcji wielowymiarowego obiektu. Wygląda to jak „wycieczka”, podczas której poruszamy się po przestrzeni, zmieniając w sposób ciągły punkt widzenia. Wybór ciągu projekcji polega na tym, że z aktualnej projekcji (punktu widzenia) k_i do następnej wybranej losowo projekcji k_{i+1} dochodzimy poprzez ciąg projekcji, powstałych jako interpolacje projekcji k_i oraz k_{i+1} . Jak widać użyteczność tego algorytmu opiera się na pomysłcie ciągłego interpolowania nieskończonej sekwencji losowo wybranych projekcji. Przyjrzyjmy się bliżej najczęściej stosowanej w *grand tour* realizacji pojedynczej projekcji. Rozważmy p -elementowy zbiór n -wymiarowych danych zapisany w postaci macierzy:

$$X = [X_1, X_2, \dots, X_p] = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1p} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{np} \end{bmatrix}$$

Jednowymiarowa projekcja tych danych oznacza projekcję na dany wektor β . Przyjmie ona postać:

$$\begin{aligned} \beta^T X &= [\beta^T X_1, \beta^T X_2, \dots, \beta^T X_p] = \\ &= [\beta_1 x_{11} + \beta_2 x_{21} + \dots + \beta_n x_{n1}, \beta_1 x_{12} + \beta_2 x_{22} + \dots + \beta_n x_{n2}, \dots, \beta_1 x_{1p} + \beta_2 x_{2p} + \dots + \beta_n x_{np}] \end{aligned}$$

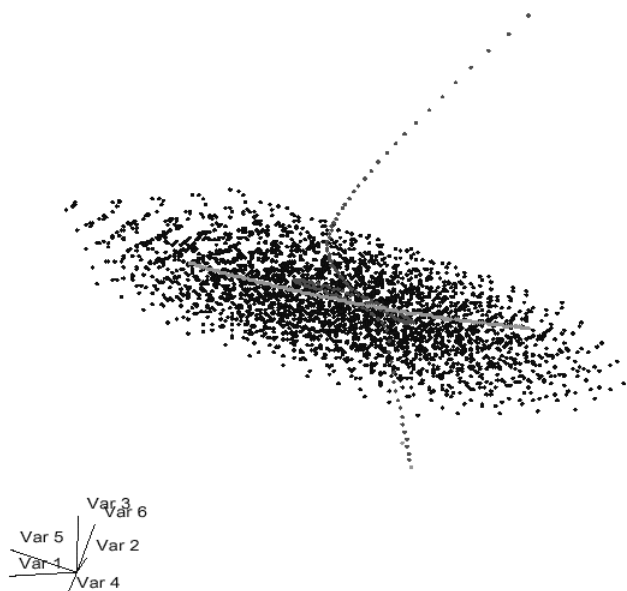
gdzie: $\sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2 + \dots + \beta_n^2} = 1$

Projekcja dwuwymiarowa zostaje zdefiniowana jako dwie jednowymiarowe projekcje na dwa wektory β_1, β_2 , które spełniają warunek: $\beta_1^T \beta_2 = 0$. Analogicznie można rozszerzyć tą definicję dla projekcji d -wymiarowej. Z powyższego wynika, że projekcja dwuwymiarowa jest po prostu rzutem prostopadłym na płaszczyznę. Czyli w danym punkcie e dwuwymiarowej płaszczyzny P widoczne są wszystkie punkty znajdujące się w całej podprzestrzeni $n-2$ wymiarowej zawierającej e i prostopadłej do P . Takie postępowanie prowadzi do tego, że projekcja obiektu sprowadza się do widoku kształtu jego obrysu (cienia), bez możliwości zaobserwowania cech związanych np. z nachyleniem ścian.

Powyższa metoda rzutowania różni się od metody przedstawionej w tej rozprawie w rozdziale 3 w sposób zasadniczy. Stanowi ona bowiem rzut **prostopadły** na płaszczyznę służącą do obserwacji, natomiast w rozdziale 3 opisano metodę rzutowania **równoległego** do danego wektora prostopadłego do płaszczyzny. W przypadku rzutu prostopadłego w danym punkcie e płaszczyzny P służącej do obserwacji, widoczne są wszystkie punkty odpowiedniej podprzestrzeni $n-2$ wymiarowej (gdzie n -wymiar przestrzeni). Natomiast w przypadku rzutu równoległego do danego wektora r prostopadłego do płaszczyzny P , w danym punkcie e widoczne są wszystkie punkty leżące na prostej przechodzącej przez e i równoległej do r . W przestrzeni 3-wymiarowej obie metody sprowadzają się do tego samego. Natomiast w przestrzeniach o większej liczbie wymiarów, w danym punkcie e płaszczyzny P widoczne są wszystkie punkty należące do podprzestrzeni o różnej liczbie wymiarów, zależnej od metody. Metoda opracowana w ramach tej rozprawy i przedstawiona w rozdziale 3 umożliwia dodatkowo obserwację nachylenia ścian obserwowanej bryły, co nie jest możliwe przy rzucie prostopadłym. Bowiem przy rzucie prostopadłym, w jednym punkcie na ekranie może być widocznych jednocześnie wiele punktów, będących w takiej samej odległości od płaszczyzny stanowiącej ekran. Prowadzi to do sytuacji w której nie można określić, od którego z tych punktów ma zależeć jasność bądź kolor punktu na ekranie.

Jeszcze inaczej wygląda porównanie rzutu prostopadłego z opracowaną przez autora metodą wizualizacji wielowymiarowych danych dyskretnych przedstawioną w rozdziale 6. Intuicyjnie metoda ta polega na rzucie równoległym z lokalnym rzutem prostopadłym, mającym zasięg ograniczony przez wprowadzony w tej pracy *maksymalny promień tunelu*. Rozwiązanie to pozwala na obserwacje wybranych fragmentów przestrzeni niosących istotne informacje, niemożliwe do uzyskania z wykorzystaniem rzutu prostopadłego. Wykorzystując rzut prostopadły niemożliwe byłoby np. zaobserwowanie w przykładach 6.3.2 oraz 6.3.3 faktu, że opisane tam zbiory nie zachodzą na siebie. Należy zwrócić uwagę na fakt, że metoda

przedstawiona w rozdziale 6 z parametrem *maksymalny promień tunelu* o wartości równej nieskończoność staje się znany z literatury rzutem prostokątnym. Jak z tego wynika, opracowana w tej pracy metoda jest bardziej ogólna.



Rysunek 2.1. Przedstawiony w pracy [26] przykład zastosowania biblioteki XGobi do wizualizacji zbioru 6-wymiarowych punktów. W danym punkcie ekranu widoczne są (zlewając się w jeden punkt) wszystkie punkty, należące do odpowiadającej temu punktowi 4-wymiarowej podprzestrzeni.

Na rysunku 2.1 pokazano przedstawiony w pracy [26] przykład zastosowania metody *grand tour* przy użyciu biblioteki XGobi do przedstawienia 6-wymiarowych danych.

2.2. METODA GŁÓWNYCH SKŁADOWYCH (PCA)

Podobną do opisanej wcześniej metody transformacji, jest mogąca służyć wizualizacji wielowymiarowych danych metoda głównych składowych (*principal component analysis*, porównaj np. pracę [24]). W metodzie tej dokonuje się rzutu prostokątnego na płaszczyznę reprezentowaną przez specjalnie wybrane wektory β_1, β_2 . Są to wektory własne, odpowiadające dwóm największym wartościom własnym macierzy kowariancji zbioru obserwacji. Dobór wektorów β_1, β_2 przeprowadza się w ten sposób, by na płaszczyźnie stanowiącej ekran były zachowane możliwie duże odległości pomiędzy punktami. Wybierając zamiast dwóch odpowiednio trzy wektory $\beta_1, \beta_2, \beta_3$, można przy pomocy tej metody oglądać wielowymiarowe dane poprzez obserwację przestrzeni 3-wymiarowej. Istota tej metody jest

zgodna z istotą koncepcji rzutowania, przedstawioną przy opisie metody *grand tour* - z eliminacją czynnika ruchu.

2.3. METODY WYKORZYSTUJĄCE SIECI NEURONOWE

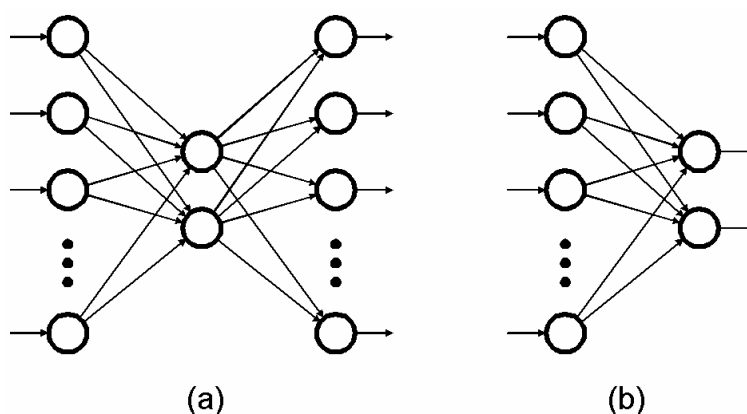
W pracach [21], [23], [25], [1] i [31] zaproponowano zastosowanie sieci neuronowych do wizualizacji danych. Metoda ta oparta jest na transformacji n -wymiarowej przestrzeni danych w dwuwymiarową przestrzeń, przy użyciu sieci neuronowej.

2.3.1. AUTOASOCJACYJNE SIECI NEURONOWE

W metodzie zastosowanej w pracy [1] zbiór danych przed podaniem na wejścia sieci neuronowej należy przetworzyć. Mamy zbiór m wymiarowych danych. Na początku należy ustalić zbiór wektorów referencyjnych $p=\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ reprezentujących interesujące obszary przestrzeni danych (np. wzorce rozważanych klas danych). Każdy wektor danych $x=(x_1, x_2, \dots, x_m)$ zastępujemy wektorem $d=(d_1, d_2, \dots, d_n)$, gdzie:

$$d_i = \sqrt{(x_1 - p_{i,1})^2 + (x_2 - p_{i,2})^2 + \dots + (x_m - p_{i,m})^2}$$

przy czym $p_{i,j}$ oznacza j -tą współrzędną i -tego wektora referencyjnego p_i . Jak widać wektor d reprezentuje odległości końca wektora x do końców wektorów referencyjnych (w metryce euklidesowej). Otrzymane w ten sposób n -wymiarowe wektory d zostają podane na wejście sieci neuronowej. Do nauki użyta zostaje autoasocjacyjna sieć neuronowa, która ma n wejść, jedną z warstw pośrednich złożoną z 2 neuronów oraz n wyjść. Sieć uczona jest metodą propagacji wstecznej błędu.

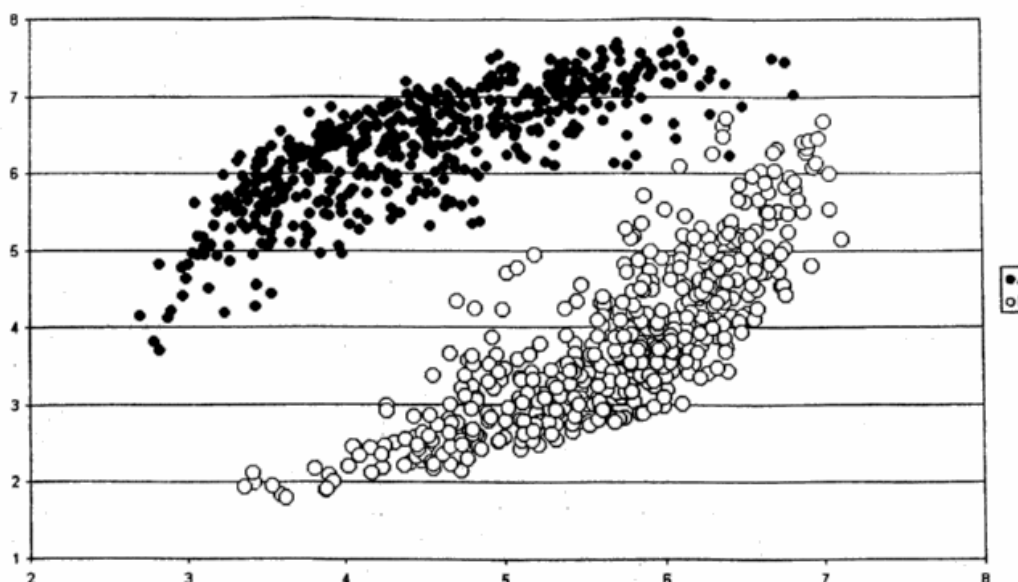


Rysunek 2.2. Struktura autoasocjacyjnej sieci neuronowej służącej do wizualizacji wielowymiarowych danych. (a) trenowanie sieci w celu uzyskania na wyjściach sygnałów jak najbardziej zbliżonych do sygnałów podawanych na wejścia, (b) przekształcanie wejściowego sygnału w położenie na dwuwymiarowym ekranie przy pomocy fragmentu wcześniej nauczonej sieci.

Na wyjściach sieci neuronowej w wyniku jej uczenia mają się pojawić takie same sygnały, jakie zostają podane na jej wejścia. Działanie opisywanej sieci opiera się na zamianie wejściowej n -wymiarowej przestrzeni B w dwuwymiarową przestrzeń Y a następnie z powrotem w n -wymiarową przestrzeń B^* , tak by B^* była jak najbardziej zbliżona do B . Dane przechodząc przez warstwę złożoną z dwóch neuronów, których wyjścia reprezentują dwuwymiarową przestrzeń Y zostają skompresowane, w wyniku czego w dwóch wymiarach zostają zachowane pewne indywidualne cechy oryginalnych danych z przestrzeni B , pozwalające na rekonstrukcję tych danych.

Po zakończeniu nauki można przystąpić do wizualizacji danych. Polega ona na podaniu każdego wektora d reprezentującego wektor danych x , na wejście sieci neuronowej i na wyświetleniu (na podstawie danych z warstwy ukrytej) dwuwymiarowego punktu go reprezentującego. Położenie tego punktu określone zostaje przez dwie współrzędne, wzięte bezpośrednio z wyjść dwóch neuronów składających się na warstwę pośrednią, reprezentującą (w sposób skompresowany) przestrzeń B .

Jeśli powyższą metodę zmodyfikujemy w ten sposób, że zastosujemy warstwę pośrednią reprezentującą przestrzeń Y złożoną z trzech neuronów, to przestrzeń Y będzie trójwymiarowa, czyli dane wejściowe będzie można oglądać na ekranie komputera jako punkty w przestrzeni trójwymiarowej.



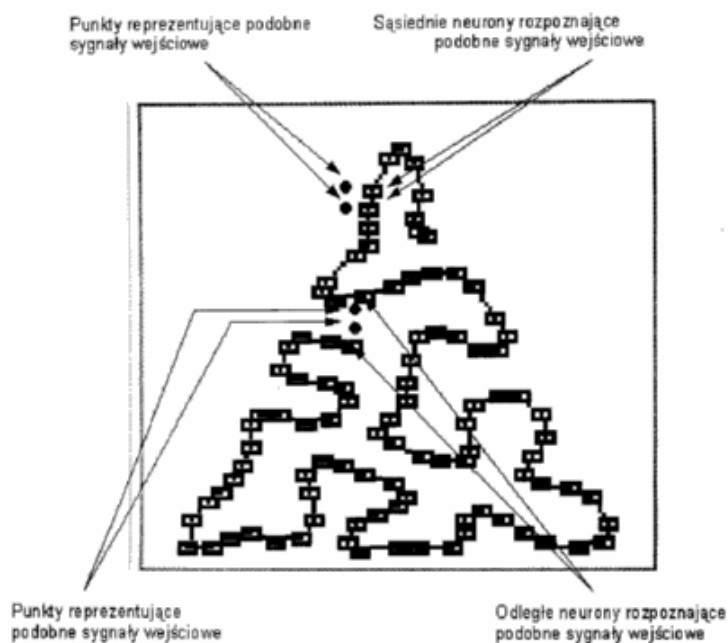
Rysunek 2.3. Przedstawiony w pracy [1] przykład zastosowania sieci neuronowej do wizualizacji 10-wymiarowych zbiorów danych.

Opisana powyżej metoda rzutowania przy pomocy sieci neuronowej jest inna, niż metody przedstawione w pracy, ponieważ pozwala przedstawić na ekranie pewne zależności przestrzenne pomiędzy danymi, zauważone przez sieć neuronową, jednak przy założeniu wcześniejszego podania wektorów referencyjnych.

2.3.2. SIECI KOHONENA

W pracy [31] przedstawiono sposób pozwalający wizualizować wielowymiarowe dane przy użyciu sieci Kohonena. Jest to sieć neuronowa jednowarstwowa z regułami uczenia konkurencyjnego, w której wprowadzono pojęcie sąsiedztwa. Do każdego neuronu dochodzą wszystkie wejścia sieci. W trakcie uczenia modyfikacji ulegają wagi neuronu – zwycięzcy (którego sygnał wyjściowy, będący odpowiedzią na element ciągu uczącego jest największy) oraz (w mniejszym stopniu) wagi neuronów, będących sąsiadami zwycięzcy. Modyfikacja wag przebiega w tym kierunku, by odpowiedź neuronu (zwycięzcy oraz sąsiadów zwycięzcy) na dany element ciągu uczącego była jeszcze większa.

Przyjmując sąsiedztwo dwuwymiarowe (neurony ułożone w siatce linii i kolumn), można bezpośrednio reprezentować wyjście sieci na ekranie w ten sposób, że sygnał neuronu znajdującego się w i -tej linii oraz j -tej kolumnie sieci, będzie wyświetlony na ekranie jako punkt o współrzędnych (i,j) .

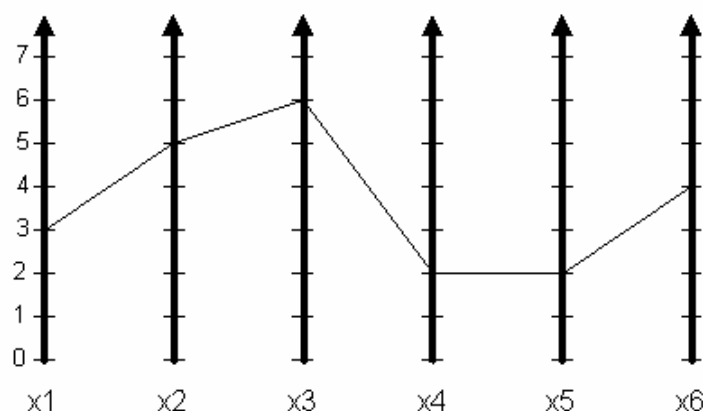


Rysunek 2.4. Przedstawione w pracy [31] korzystne i niekorzystne odwzorowania dwuwymiarowych punktów wejściowej przestrzeni, przy pomocy jednowymiarowej sieci Kohonena. Jak widać zdarza się, że podobne sygnały wejściowe mogą być reprezentowane przez odległe neurony.

Na rysunku 2.4 pokazano przedstawione w pracy [31] przykładowe odwzorowanie przestrzeni dwuwymiarowej w przestrzeń jednowymiarową przy użyciu sieci Kohonena. Wadą tej metody wizualizacji jest fakt, że stosunkowo bliskie obszary wielowymiarowej przestrzeni wejściowej, mogą być reprezentowane przez odległe obszary ekranu.

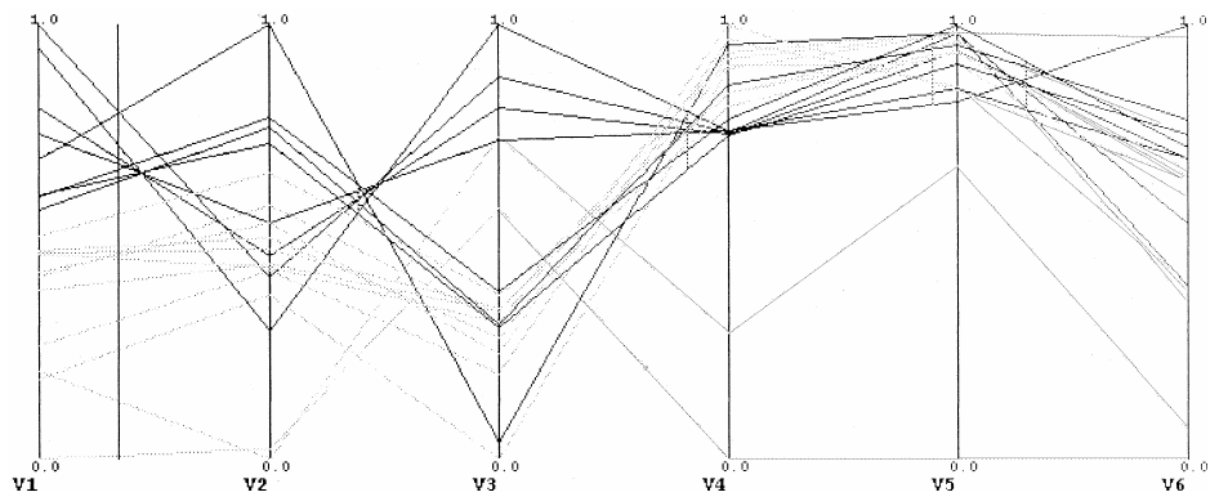
2.4. METODA OSI RÓWNOLEGLYCH

Inną metodą wizualizacji wielowymiarowych danych jest metoda równoległych osi współrzędnych (*parallel coordinates*) opisana w pracach [10], [14], [19], [20], [22], [34]. W metodzie tej n równoległych osi współrzędnych rozmieszczonych jest równomiernie na płaszczyźnie. Punktem n -wymiarowemu odpowiada n punktów na płaszczyźnie, po jednym na każdej osi. Położenie punktu na i -tej osi odpowiada i -tej współrzędnej n -wymiarowego punktu. Punkty na sąsiadujących osiach łączone są odcinkami tworząc łamaną złożoną z $n-1$ odcinków, która reprezentuje jeden punkt n -wymiarowy (rysunek 2.5).



Rysunek 2.5. Jeden sześciowymiarowy punkt o współrzędnych (3,5,6,2,2,4) reprezentowany jest jako łamana złożona z 5 odcinków łączących 6 punktów na płaszczyźnie, po jednym punkcie na każdej z równoległych osi. Położenie punktu na i -tej osi odpowiada i -tej współrzędnej sześciowymiarowego punktu.

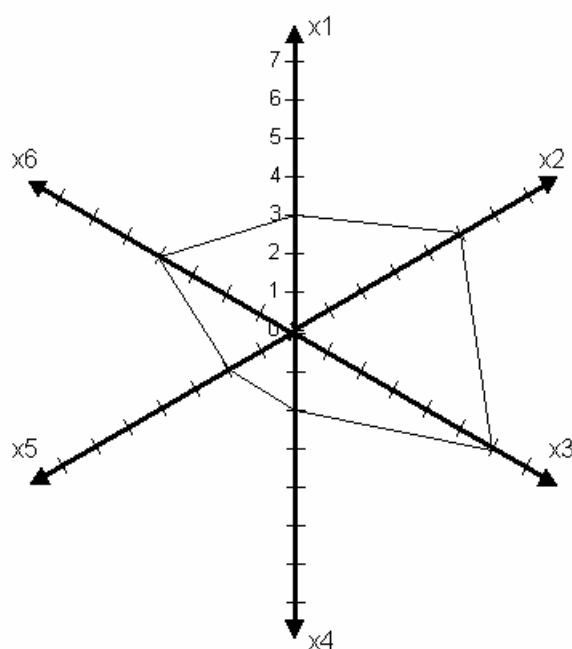
Prowadzi się badania (np. praca [27]) mające na celu szukanie metod interpretacji wyświetlanych w ten sposób danych. Dowodzą one, że powyższy sposób wizualizacji umożliwi obserwację różnego rodzaju cech obserwowanych wielowymiarowych danych, np. występowanie skupisk punktów. Na rysunku 2.6 pokazano przedstawiony w pracy [27] przykład zastosowania metody równoległych osi współrzędnych do przedstawienia zbiorów punktów. Wadą tej metody jest fakt, że kształt łamanej reprezentującej n -wymiarowy punkt zależy od ustalonej kolejności rozmieszczenia na płaszczyźnie osi poszczególnych współrzędnych.



Rysunek 2.6. Przedstawiony w pracy [27] przykład zastosowania równoległych osi współrzędnych do wizualizacji 6-wymiarowych zbiorów danych.

2.5. OBRAZ RADAROWY

Podobną do metody równoległych osi współrzędnych jest metoda wizualizacji danych wielowymiarowych wykorzystująca obraz radarowy (*star graph*). Została ona przedstawiona w pracy [28]. W metodzie tej n osi współrzędnych wychodzi promieniście z jednego punktu, dzieląc koło na n równych części.



Rysunek 2.7. Na obrazie radarowym jeden sześciowymiarowy punkt o współrzędnych (3,5,6,2,2,4) reprezentowany jest jako łamana złożona z 6 odcinków łączących 6 punktów na płaszczyźnie, po jednym punkcie na każdej z promieniście rozchodzących się osi. Położenie punktu na i -tej osi odpowiada i -tej współrzędnej punktu.

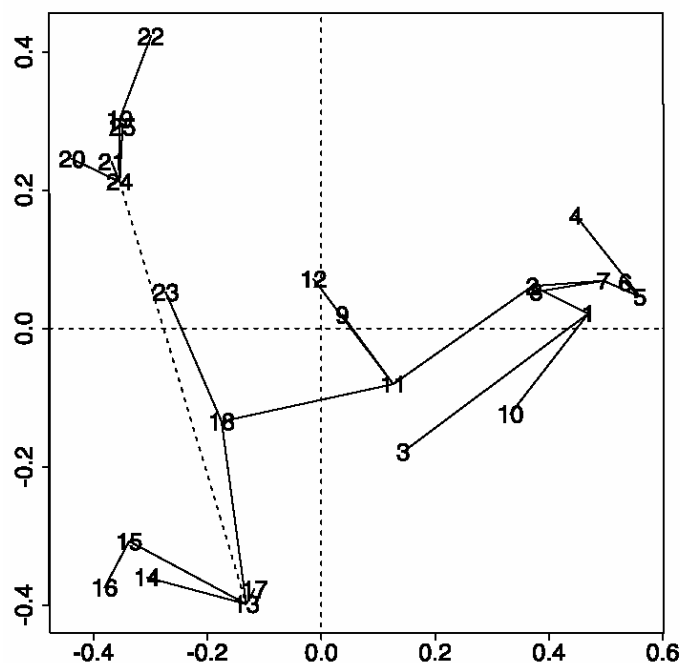
Każdy punkt jest reprezentowany przez łamaną zamkniętą. Łamana przecina i -tą oś w miejscu odpowiadającym wartości i -tej współrzędnej n -wymiarowego punktu (rysunek 2.7). Wadą tej metody jest fakt, że przy dużej liczbie wymiarów wykres ten może być mało czytelny. Jest to związane z tym, że wraz ze wzrostem liczby osi współrzędnych maleje kąt dzielący sąsiadujące osie. Druga wada, podobnie jak w poprzedniej metodzie wynika z faktu, że kształt łamanej reprezentującej n -wymiarowy punkt zależy od wybranej kolejności rozmieszczenia osi współrzędnych.

Jak widać metoda równoległych osi współrzędnych oraz metoda wykorzystująca obraz radarowy są zupełnie inne niż metody przedstawione w pracy. Wynika to z zupełnie innego sposobu zobrazowania wielowymiarowego punktu jako dwuwymiarowej łamanej.

2.6. SKALOWANIE WIELOWYMIAROWE

Do wizualizacji wielowymiarowych danych wykorzystuje się również skalowanie wielowymiarowe (*multidimensional scaling*, MDS). Metoda ta została wykorzystana np. w pakiecie Xgvis [8]. Skalowanie wielowymiarowe jest oparte na obliczaniu odległości pomiędzy każdą parą m -wymiarowych punktów. Na tej podstawie rozważana metoda pozwala uzyskać położenie tych punktów w przestrzeni n -wymiarowej o dowolnej, zadanej liczbie wymiarów. Oto zarys tej metody: niech d_{ij} oznacza odległość pomiędzy m -wymiarowymi punktami nr i oraz j . Skalowanie wielowymiarowe polega na takim rozmieszczeniu punktów w przestrzeni n -wymiarowej, by odległość D_{ij} liczona w tej przestrzeni pomiędzy odwzorowanymi punktami nr i oraz j była jak najbardziej zbliżona do d_{ij} . Działanie algorytmu MDS może polegać na iteracyjnej zmianie położenia losowo (początkowo) rozmieszczonych punktów w przestrzeni n -wymiarowej w ten sposób, by funkcja: $S = \sqrt{\sum_{i>j} (D_{ij} - d_{ij})^2}$ przyjęła

jak najmniejszą wartość. Dla $n=2$ metoda ta pozwala oglądać wielowymiarowe dane bezpośrednio na dwuwymiarowym ekranie komputera. Dla $n=3$ metoda ta pozwala oglądać wielowymiarowe dane poprzez przedstawienie na ekranie komputera punktów znajdujących się w przestrzeni 3-wymiarowej. Wadą tej metody jest fakt, że dla bardziej złożonych wielowymiarowych danych, przy przyjętym $n=2$ lub 3 minimum funkcji S będzie duże. Oznacza to duże różnice pomiędzy zależnościami punktów rysowanych na ekranie a rzeczywistymi zależnościami pomiędzy badanymi punktami, co w znacznym stopniu może zniekształcić obserwowane dane. Wynika to z faktu, że w ogólnym przypadku zależności pomiędzy danymi m -wymiarowymi można efektywnie skalować wielowymiarowo dopiero w przestrzeni m -wymiarowej.



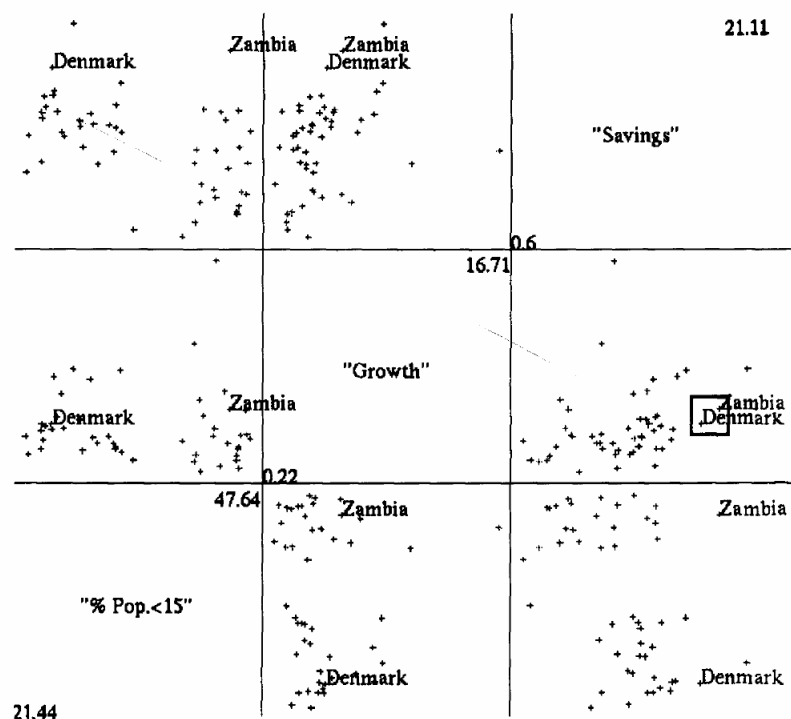
Rysunek 2.8. Przedstawiony w pracy [29] przykład zastosowania skalowania wielowymiarowego w połączeniu z konstrukcją minimalnego drzewa rozpinającego do wizualizacji podziału zbioru punktów na dwa skupiska.

Powyższa metoda została wykorzystana np. w pracy [29], w której przedstawiono metodę wizualizacji skupisk wielowymiarowych punktów, wykorzystującą połączenie skalowania wielowymiarowego oraz minimalnego drzewa rozpinającego. W celu wydzielenia k skupisk danych najpierw przedstawiono punkty na płaszczyźnie przy pomocy skalowania wielowymiarowego. Następnie skonstruowano minimalne drzewo rozpinające na grafie pełnym, którego wierzchołkami były wszystkie przedstawiane punkty, natomiast wartości krawędzi określone zostały przez odległości pomiędzy punktami. Podział na k skupisk mógł nastąpić poprzez usunięcie $k-1$ krawędzi minimalnego drzewa rozpinającego, poczynając od gałęzi o największych wartościach. Na rysunku 2.8 pokazano przedstawiony w pracy [29] przykład zastosowania powyższej metody do wizualizacji skupisk punktów.

2.7. METODA SCATTERPLOT MATRICES

W pracach [5], [11], [13] przedstawiono kolejną metodę wizualizacji wielowymiarowych danych, zwaną *scatterplot matrices*. W metodzie tej wielowymiarowe dane przedstawione są przy pomocy serii dwuwymiarowych zależności. Każda dwuwymiarowa zależność przedstawia zależność pomiędzy dwiema zmiennymi. Autorzy tej metody twierdzą, że informacje stracone poprzez wizualizację wielowymiarowych danych przy pomocy dwuwymiarowej zależności, mogą zostać zauważone poprzez jednoczesną

obserwację wielu dwuwymiarowych zależności. Na rysunku 2.9 pokazano przedstawiony w pracy [13] przykład zastosowania powyższej metody do wizualizacji trójwymiarowych danych.



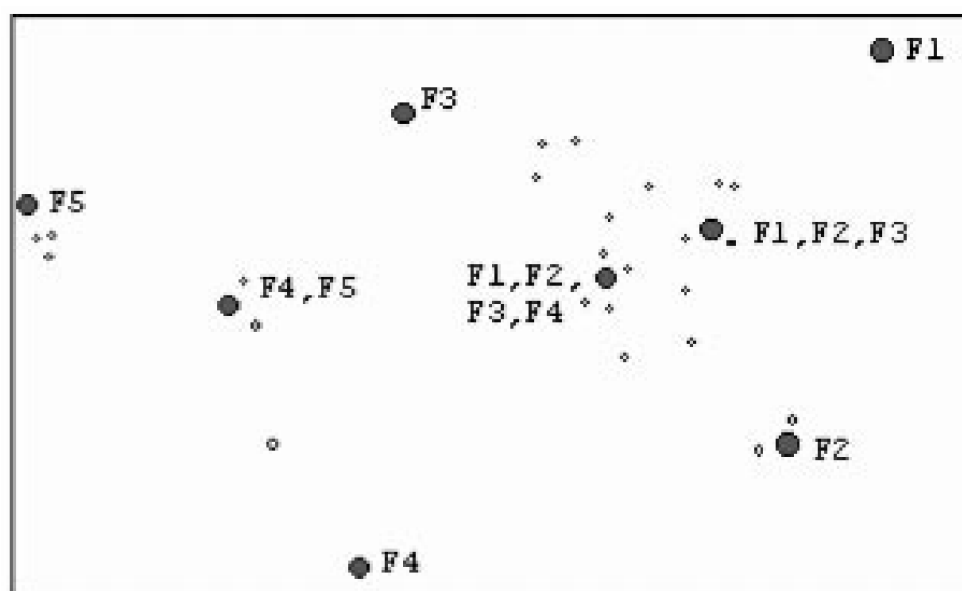
Rysunek 2.9. Przedstawiony w pracy [13] przykład zastosowania metody *scatterplot matrices* do wizualizacji zależności pomiędzy 3-wymiarowymi zbiorami danych.

Puste obszary na przekątnej określają nazwy zmiennych. Dwuwymiarowa zależność, która znajduje się w i -tym wierszu i j -tej kolumnie, przedstawia zależność pomiędzy zmienną, której nazwa znajduje się w i -tym wierszu a zmienną, której nazwa znajduje się w j -tej kolumnie. Wyżej opisana metoda ma istotną wadę. Bowiem informacje stracone poprzez wizualizację wielowymiarowych danych przy pomocy dwuwymiarowej zależności, mogą być niemożliwe do uzyskania poprzez jednoczesną obserwację wielu dwuwymiarowych zależności. Poza tym taka równoczesna obserwacja wielu zależności jest w praktyce trudna, a wyniki są mało czytelne.

2.8. MAPA ODNIESIENIA

W pracach [3],[4] przedstawiono kolejną metodę, tzw. mapę odniesienia (*relevance map*), służącą do wizualizacji wielowymiarowych danych. Na płaszczyźnie służącej do wizualizacji danych zostają rozmieszczone specjalne punkty $F_1, F_2, \dots, F_n$, reprezentujące

poszczególne cechy. Rozkład punktów reprezentujących przedstawiane wielowymiarowe dane odzwierciedla relacje pomiędzy tymi danymi a cechami. Im bardziej i -ta cecha występuje w danym obiekcie, tym bliżej powinien leżeć punkt reprezentujący dany obiekt punktu F_i . W ten sposób każdy punkt F_i , reprezentujący daną cechę, dzieli płaszczyznę na obszary bardziej oraz mniej zależne od cechy nr i (mniej oraz bardziej odległe od punktu F_i). Nie zawsze punkty $F_1, F_2, \dots, F_n$ można rozmieścić w ten sposób, by wszystkie punkty reprezentujące wizualizowane obiekty mogły być w sposób prawidłowy rozmieszczone. Wtedy dopuszcza się dodanie kopii niektórych punktów F_i reprezentujących cechy.



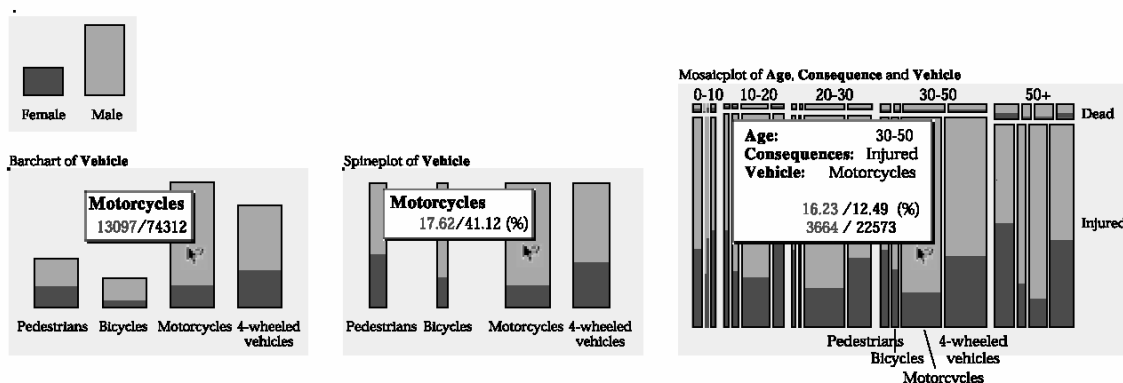
Rysunek 2.10. Przedstawiony w pracy [3] przykład zastosowania mapy odniesienia do wizualizacji zależności pomiędzy wielowymiarowymi zbiorami danych. Niektóre punkty F_i reprezentujące cechy powtarzają się w celu zapewnienia odpowiedniej bliskości wszystkim punktom tego wymagającym.

Na rysunku 2.10 pokazano przedstawiony w pracy [3] przykład zastosowania powyższej metody do wizualizacji wielowymiarowych danych. Wadą mapy odniesienia jest fakt, że przy jej pomocy można przedstawić jedynie relacje obiektów względem poszczególnych z góry zadanych cech, natomiast nie można przedstawić relacji występujących pomiędzy badanymi obiektami.

2.9. OBSZARY MOZAIKOWE

W pracach [16], [17] wprowadzono jeszcze jedną metodę, tzw. obszary mozaikowe (*mosaic plots*), które także mogą być stosowane w celu przedstawienia wielowymiarowych danych. Stanowią one naturalne rozszerzenie jednowymiarowych wykresów słupkowych.

Jeśli wykres słupkowy rozciągniemy do stałej wysokości i podzielimy pionowo wg udziału drugiej zmiennej zmieniając szerokość słupka tak, by powierzchnia odpowiadała wartości pierwszej zmiennej, to otrzymamy wykres dwuwymiarowy. Następną zmienną możemy dodać poprzez podzielenie każdego obszaru poziomo. Postępując analogicznie możemy dodać więcej zmiennych. Na rysunku 2.11 pokazano przedstawiony w pracy [17] sposób tworzenia obszarów mozaikowych w celu wizualizacji wielowymiarowych danych.



Rysunek 2.11. Przedstawione w pracy [17] etapy tworzenia obszarów mozaikowych.

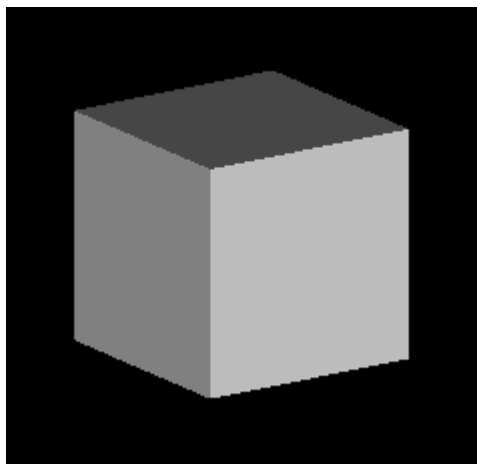
Z przedstawionych w tym rozdziale metod widać, że są różne propozycje, ale problem wizualizacji wielowymiarowych danych nie został do tej pory rozwiązany w sposób zadowalający. Stąd wysiłek włożony w opracowanie metod prezentowanych w tej pracy był wysiłkiem dobrze ukierunkowanym i celowym do poniesienia.

3. KONCEPCJA „PATRZENIA W PRZESTRZENIACH WIELOWYMIAROWYCH”

3.1. WPROWADZENIE

Jak wygląda przestrzeń n -wymiarowa? Gdybyśmy się znaleźli w takiej przestrzeni jakie wrażenia wzrokowe by do nas docierały? Aby odpowiedzieć na te pytania zastanówmy się najpierw, w jaki sposób odbieramy informację wzrokową z otaczającego nas świata?

Siatkówka oka, poprzez którą odbieramy bodźce wzrokowe z otaczającego nas świata, jest w przybliżeniu wycinkiem sfery do której dociera światło z zewnątrz poprzez soczewkę. Jest wycinkiem sfery – czyli obraz powstający na niej i przekazywany do mózgu jest 2-wymiarowy. Człowiek widzi świat poprzez parę oczu, czyli docierają do nas dwa obrazy 2-wymiarowe. Ponieważ do mózgu docierają dwa obrazy 2-wymiarowe, więc nasze rozumienie i wyobrażenie przestrzeni 3-wymiarowej jest wynikiem naszego doświadczenia i „uczenia się” przez nasz mózg rekonstrukcji tej przestrzeni. Polega ono na poznawaniu tej przestrzeni poprzez obserwację obiektów 3-wymiarowych z różnych stron, pod różnymi kątami (oglądanie przedmiotu polega na popatrzeniu na niego z różnych stron).



Rysunek 3.1. Mimo, że odbieramy obrazy dwuwymiarowe, nasze mózgi rozpoznają je jako trójwymiarowe – trzy równoległoboki (figury płaskie) różnej jasności, sklejone krawędziami odbieramy jako trójwymiarowy sześcian.

Wykorzystuje się to w kinie i telewizji, w których obserwujemy świat poprzez ekran 2-wymiarowy. Wszystkie systemy „uprzestrzennienia” telewizji i kina polegają na dostarczeniu do jednego oka obrazu przesuniętego względem drugiego obrazu dostarczonego do drugiego oka (przy czym oba obrazy są 2-wymiarowe). Jeśli nasza obserwacja rzeczywistości 3-wymiarowej polega na jej rzutowaniu na 2-wymiarowy receptor, to dlaczego

nie mielibyśmy zrobić tego samego z przestrzenią $4, 5, \dots, n$ – wymiarową ? W dalszej części zostanie przedstawione w jaki sposób „patrzeć” w takiej przestrzeni, czyli jak rzutować taką przestrzeń na ekran 2-wymiarowy.

3.2. MODEL MATEMATYCZNY

Zdefiniujmy narzędzia matematyczne, służące nam do opisu przestrzeni w której będziemy umieszczać obserwowane obiekty.

Def.3.1 *Przestrzenią obserwowaną* X będziemy nazywać dowolną przestrzeń wektorową nad ciałem F liczb rzeczywistych, n -wymiarową, $n \geq 3$, z iloczynem skalarnym.

Def.3.2 *Punktem obserwowanym* a będziemy nazywać każdy wektor *przestrzeni obserwowanej* X , czyli każdy $a \in X$

Def.3.3 $\delta : X \times 2^X \rightarrow 2^X$

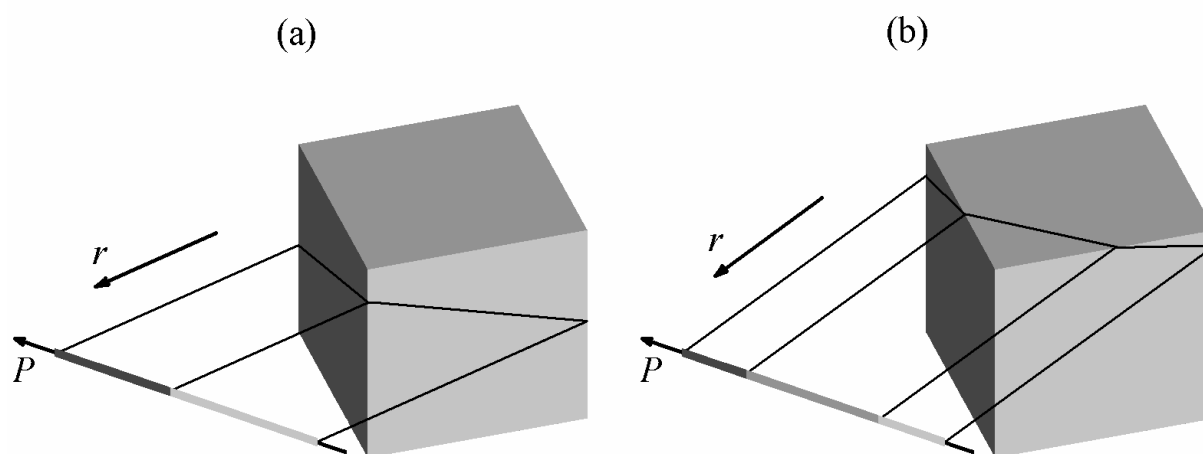
$$\delta(w, A) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ x \in X : \exists k \in N \wedge \exists \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k \in F \wedge \exists v_1, v_2, \dots, v_k \in A \text{ , t.że } x = w + \sum_{i=1}^k \beta_i v_i \right\}$$

Def.3.4 Niech $p_1, p_2 \in X$ - liniowo niezależne, $w \in X$. *Plaszczyzną obserwacyjną* $P \subset X$ będziemy nazywać $P = \delta(w, \{p_1, p_2\})$.

Zdefiniowana w ten sposób *plaszczyzna obserwacyjna* P będzie nam służyć jako ekran, poprzez który będziemy obserwować obiekty umieszczone w *przestrzeni obserwowanej* X . Wektor w wskazywać będzie położenie środka tego ekranu, natomiast p_1, p_2 jego osie. W tym momencie musimy zastanowić się w jaki sposób promienie świetlne odbite od danego *punktu obserwowanego* będą zmierzać do *plaszczyzny obserwacyjnej* ? W przestrzeni 3-wymiarowej do danego punktu e *plaszczyzny obserwacyjnej* P mogą dotrzeć tylko promienie świetlne odbite od najbliższego punktu leżącego na prostej prostopadłej do P i przechodzącej przez e . W przestrzeni 3-wymiarowej jest tylko jedna taka prosta. Natomiast w przestrzeni n -wymiarowej, dla $n > 3$ takich prostych jest więcej. Pojawia się więc problem: do jednego punktu e *plaszczyzny obserwacyjnej* P mogą dotrzeć jednocześnie promienie odbite od wielu punktów obserwowanego obiektu. Możemy temu zapobiec poprzez wybór w danej chwili jednej konkretnej prostej prostopadłej do P , która będzie nam służyć jako kierunek wzdłuż którego będziemy w danej chwili dokonywać rzutowania.

Def.3.5 *Kierunkiem rzutowania r na płaszczyznę obserwacyjną $P=\mathcal{X}(w,\{p_1,p_2\})$ będziemy nazywać dowolny wektor $r \in X$ taki, że wektory $\{p_1, p_2, r\}$ są liniowo niezależne.*

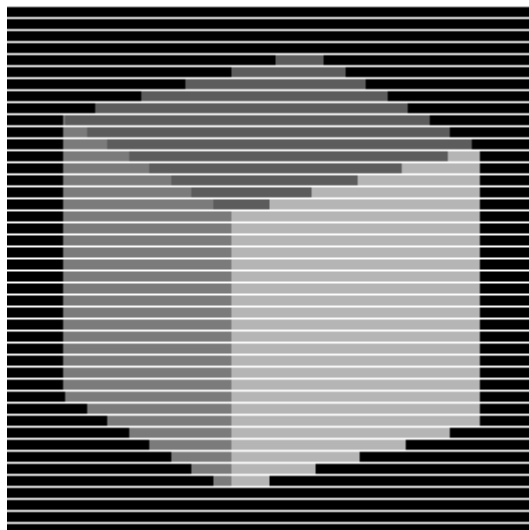
Aby to dokładnie zilustrować przyjmijmy na chwilę, że nasza *płaszczyzna obserwacyjna* P jest jednowymiarowa i przy jej pomocy chcemy obserwować bryłę 3-wymiarową, np. taką jaka jest przedstawiona na rys. 3.1. W celu poznania jej wyglądu nie dość, że będziemy musieli „obejść ją ze wszystkich stron”, to dodatkowo z każdego punktu widzenia będziemy musieli ją „prześledzić z góry na dół”. Na rysunku 3.2. pokazano sposób powstawania obrazu na jednowymiarowej *płaszczyźnie obserwacyjnej* P . Przedstawiono różnice w obrazach, powstających na jednowymiarowej *płaszczyźnie obserwacyjnej* P , uzyskane w wyniku zmiany ustawienia *kierunku rzutowania* r . Jak widać na *płaszczyźnie obserwacyjnej* P widoczny jest fragment bryły odpowiadający ustawieniu P i *kierunku rzutowania* r . Jest to sytuacja analogiczna do „normalnej” obserwacji (przestrzeń 3-wymiarowa obserwowana przez oczy 2-wymiarowe), gdzie jesteśmy w stanie dostrzec jedynie fragment bryły widoczny z danego punktu widzenia.



Rysunek 3.2. Pokazano dwa różne obrazy powstające na jednowymiarowej *płaszczyźnie obserwacyjnej* P . Sytuacje (a) oraz (b) różnią się jedynie innym ustawieniem *kierunku rzutowania* r .

Na rysunku 3.3 przedstawiono 44 jednowymiarowe płaszczyzny obserwacyjne, uzyskane w sposób pokazany na rysunku 3.2. Należy zwrócić uwagę na fakt, że wszystkie jednowymiarowe *płaszczyzny obserwacyjne* przedstawione na tym rysunku różnią się jedynie wyborem *kierunku rzutowania* r . Rysunek ten pozwala zauważyć, że zmieniając punkt widzenia poprzez zmianę położenia *płaszczyzny obserwacyjnej* P , oraz zmieniając *kierunek*

rzutowania r przy danym położeniu *płaszczyzny obserwacyjnej* P , możemy uzyskać wszystkie informacje o zewnętrznym wyglądzie obserwowanego obiektu. Pozwala to na powstanie w naszym umyśle obrazu całości zewnętrznego wyglądu obserwowanej bryły.



Rysunek 3.3. Przedstawiono 44 obrazy powstałe na jednowymiarowej *płaszczyźnie obserwacyjnej* przy różnych ustawieniach *kierunku rzutowania* r . Każda pozioma linia o szerokości całego rysunku stanowi tutaj jednowymiarową *płaszczyznę obserwacyjną* przy konkretnym ustalonym r . Dla przejrzystości rozdzielono *płaszczyzny obserwacyjne* liniami białymi.

Def.3.6 *Kierunek rzutowania* r na *płaszczyznę obserwacyjną* $P=\delta(w,\{p_1,p_2\})$ będziemy nazywać **właściwym** jeśli wektory $\{p_1, p_2, r\}$ są układem ortogonalnym.

Def.3.7 **Prostą równoległą** do $r \in X$ i przechodzącą przez $a \in X$ będziemy nazywać zbiór $k_{a,r} \subset X$:

$$k_{a,r} \stackrel{def}{=} \{x \in X : \exists \psi \in F \text{ t.ż. } x = \psi r + a\}$$

Def.3.8 **Rzutem punktu obserwowanego** $a \in X$ zgodnym z *kierunkiem rzutowania* $r \in X$ na *płaszczyznę obserwacyjną* P będziemy nazywać wektor:

$$e \in P \cap k_{a,r} \quad , \quad \text{gdzie } k_{a,r} \text{ jest prostą równoległą do } r \text{ i przechodzącą przez } a$$

Sprawdźmy czy taka definicja *rzutu punktu obserwowanego* jest prawidłowa, czyli czy dany *punkt obserwowany* a będzie widoczny w co najwyżej jednym miejscu *płaszczyzny obserwacyjnej* P . Pokazuje to następujące twierdzenie:

Twierdzenie 3.1

Niech: $P = \delta(w, \{p_1, p_2\})$ - płaszczyzna obserwacyjna,

$r \in X$ - kierunek rzutowania na płaszczyznę obserwacyjną P ,

$a \in X$,

$k_{a,r}$ - prosta równoległa do r i przechodząca przez a

wtedy: zbiór $P \cap k_{a,r}$ jest zbiorem co najwyżej jednoelementowym

Dowód:

Hipoteza: $\exists e_1 \neq e_2$ t.ż. $e_1 \in P \cap k_{a,r}$ oraz $e_2 \in P \cap k_{a,r}$

czyli:

$\exists e_1 \neq e_2$ takie, że $e_1 \in P \wedge e_2 \in P \wedge e_1 \in k_{a,r} \wedge e_2 \in k_{a,r}$

korzystając z definicji P oraz z definicji $k_{a,r}$ otrzymujemy:

$\exists \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4 \in F$ t.ż. $e_1 = w + \beta_1 p_1 + \beta_2 p_2 \wedge e_2 = w + \beta_3 p_1 + \beta_4 p_2$ oraz $\exists \psi_1, \psi_2 \in F$ t.ż. $e_1 = \psi_1 r + a \wedge e_2 = \psi_2 r + a$

z dwóch ostatnich otrzymanych wzorów na e_1 , e_2 oraz z tego, że $e_1 \neq e_2$ wynika $\psi_1 \neq \psi_2$;

przyrównajmy otrzymane wzory na e_1 oraz przyrównajmy otrzymane wzory na e_2 , wtedy:

$\psi_1 r + a = w + \beta_1 p_1 + \beta_2 p_2 \wedge \psi_2 r + a = w + \beta_3 p_1 + \beta_4 p_2 \wedge \psi_1 \neq \psi_2$

z obu równań policzmy a , więc:

$a = w + \beta_1 p_1 + \beta_2 p_2 - \psi_1 r \wedge a = w + \beta_3 p_1 + \beta_4 p_2 - \psi_2 r \wedge \psi_1 \neq \psi_2$

przyrównajmy otrzymane wzory na a , wtedy:

$w + \beta_1 p_1 + \beta_2 p_2 - \psi_1 r = w + \beta_3 p_1 + \beta_4 p_2 - \psi_2 r \wedge \psi_1 \neq \psi_2$

przenosząc na jedną stronę i grupując otrzymamy:

$(\psi_2 - \psi_1) r + (\beta_1 - \beta_3) p_1 + (\beta_2 - \beta_4) p_2 = 0 \wedge (\psi_2 - \psi_1) \neq 0$

czyli wektory $\{p_1, p_2, r\}$ nie są liniowo niezależne – jest to sprzeczne z definicją kierunku rzutowania r , czyli hipoteza fałszywa ■

Pokażemy teraz warunek konieczny i wystarczający na to by dany punkt obserwowany a był widoczny na płaszczyźnie obserwacyjnej P :

Twierdzenie 3.2

Niech: $P = \delta(w, \{p_1, p_2\})$ - płaszczyzna obserwacyjna,

$r \in X$ - kierunek rzutowania na płaszczyznę obserwacyjną P ,

$a \in X$,

$k_{a,r}$ - prosta równoległa do r i przechodząca przez a

wtedy: $P \cap k_{a,r} \neq \emptyset$ wtw $a-w$ jest kombinacją liniową wektorów $\{p_1, p_2, r\}$

Dowód:

1) $\Rightarrow$

$P \cap k_{a,r} \neq \emptyset$ więc: $\exists e \in P \cap k_{a,r}$ czyli: $\exists e \in X$ t.że $e \in P \wedge e \in k_{a,r}$

korzystając z definicji P oraz z definicji $k_{a,r}$ otrzymujemy:

$$\exists \beta_1, \beta_2 \in F \text{ t.że } e = w + \beta_1 p_1 + \beta_2 p_2 \wedge \exists \psi \in F \text{ t.że } e = \psi r + a$$

przyporównajmy otrzymane wzory na e , wtedy:

$$\exists \beta_1, \beta_2, \psi \in F \text{ t.że } \psi r + a = w + \beta_1 p_1 + \beta_2 p_2$$

więc:

$$\exists \beta_1, \beta_2, \psi \in F \text{ t.że } a - w = \beta_1 p_1 + \beta_2 p_2 + (-\psi)r$$

czyli $a-w$ jest kombinacją liniową wektorów: $\{p_1, p_2, r\}$ $\square$

2) $\Leftarrow$

$a-w$ jest kombinacją liniową wektorów $\{p_1, p_2, r\}$ czyli:

$$\exists \xi_1, \xi_2, \xi_3 \in F \text{ t.że } a - w = \xi_1 p_1 + \xi_2 p_2 + \xi_3 r$$

zatem:

$$\exists \xi_1, \xi_2, \xi_3 \in F \text{ t.że } (-\xi_3)r + a = w + \xi_1 p_1 + \xi_2 p_2$$

przyjmijmy oznaczenie: $e = w + \xi_1 p_1 + \xi_2 p_2$, $e \in X$ wtedy:

$$\exists \xi_1, \xi_2 \in F \text{ t.że } e = w + \xi_1 p_1 + \xi_2 p_2 \wedge \exists \psi = -\xi_3 \in F \text{ t.że } e = \psi r + a$$

korzystając z definicji P oraz z definicji $k_{a,r}$ otrzymujemy:

$$e \in P \wedge e \in k_{a,r} \text{ czyli: } \exists e \in P \cap k_{a,r}$$

z tego wynika, że: $P \cap k_{a,r} \neq \emptyset$ $\blacksquare$

Def.3.9 Niech $e \in P \cap k_{a,r}$ - rzut punktu obserwowanego $a \in X$ zgodny z kierunkiem rzutowania $r \in X$ na płaszczyznę obserwacyjną $P = \delta(w, \{p_1, p_2\})$.

Położeniem rzutu punktu obserwowanego a będziemy nazywać parę $\{\beta_1, \beta_2\}$, $\beta_1, \beta_2 \in F$ t.że $e = w + \beta_1 p_1 + \beta_2 p_2$

Odległością rzutu punktu obserwowanego a będziemy nazywać $\psi \in F$ t.że $e = \psi r + a$

Oczywiście zdefiniowana w ten sposób *odległość rzutu* nie spełnia własności np. metryki ale jest idealna do naszych potrzeb. Poza odległością określa bowiem poprzez znak, również po której stronie *płaszczyzny obserwacyjnej* P znajduje się *punkt obserwowany* a .

Zastanówmy się teraz nad następującym problemem: weźmy *płaszczyznę obserwacyjną* P , dowolny punkt a *przestrzeni obserwowanej* X oraz dowolny *kierunek*

rzutowania r . Wykonajmy rzut punktu obserwowanego a zgodnie z kierunkiem rzutowania r na płaszczyznę obserwacyjną P otrzymując punkt $e \in P$. Chcemy dowiedzieć się jakie jest położenie punktu e na P oraz jaka jest jego odległość od a , czyli chcemy policzyć *położenie rzutu punktu obserwowanego a* oraz *odległość rzutu punktu obserwowanego a* . Jak to zrobić pokazuje nam następujące twierdzenie:

Twierdzenie 3.3

Niech: X - przestrzeń obserwowana, n -wymiarowa, $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ – baza X

$P = \delta(w, \{p_1, p_2\})$ -płaszczyzna obserwacyjna, $\{p_1, p_2\}$ -układ ortogonalny,

$$p_1 = \sum_{i=1}^n p_{1,i} x_i, \quad p_2 = \sum_{i=1}^n p_{2,i} x_i, \quad p_{j,i} \in F \quad \forall j=1,2 \quad \forall i=1,2,\dots,n$$

$$w = \sum_{i=1}^n w_i x_i, \quad w_i \in F \quad \forall i=1,2,\dots,n$$

$r \in X$ - właściwy kierunek rzutowania na płaszczyznę obserwacyjną P ,

$$r = \sum_{i=1}^n r_i x_i, \quad r_i \in F \quad \forall i=1,2,\dots,n$$

$a \in X$ - punkt obserwowany, $a = \sum_{i=1}^n a_i x_i, \quad a_i \in F \quad \forall i=1,2,\dots,n$

$\beta_1, \beta_2, \psi \in F$, t.ż. spełniony jest układ równań:

$$\begin{cases} \beta_1 p_{1,1} + \beta_2 p_{2,1} - \psi r_1 = a_1 - w_1 \\ \beta_1 p_{1,2} + \beta_2 p_{2,2} - \psi r_2 = a_2 - w_2 \\ \vdots \\ \beta_1 p_{1,n} + \beta_2 p_{2,n} - \psi r_n = a_n - w_n \end{cases}$$

wtedy: para $\{\beta_1, \beta_2\}$ jest *położeniem rzutu punktu obserwowanego a* ,

ψ jest *odległością rzutu punktu obserwowanego a*

Dowód:

z założenia mamy: $\forall i=1,2,\dots,n \quad \beta_1 p_{1,i} + \beta_2 p_{2,i} - \psi r_i = a_i - w_i$

mnożąc obie strony równań przez x_i oraz dodając wszystkie równania stronami otrzymamy:

$$\sum_{i=1}^n (\beta_1 p_{1,i} + \beta_2 p_{2,i} - \psi r_i) x_i = \sum_{i=1}^n (a_i - w_i) x_i$$

więc:

$$\sum_{i=1}^n \beta_1 p_{1,i} x_i + \sum_{i=1}^n \beta_2 p_{2,i} x_i - \sum_{i=1}^n \psi r_i x_i = \sum_{i=1}^n a_i x_i - \sum_{i=1}^n w_i x_i$$

czyli:

$$\beta_1 \sum_{i=1}^n p_{1,i} x_i + \beta_2 \sum_{i=1}^n p_{2,i} x_i - \psi \sum_{i=1}^n r_i x_i = \sum_{i=1}^n a_i x_i - \sum_{i=1}^n w_i x_i$$

korzystając z przyjętych oznaczeń otrzymujemy:

$$\beta_1 p_1 + \beta_2 p_2 - \psi r = a - w$$

więc:

$$w + \beta_1 p_1 + \beta_2 p_2 = \psi r + a$$

przez $e \in X$ przyjmijmy: $e = w + \beta_1 p_1 + \beta_2 p_2$, wtedy:

$$\exists \beta_1, \beta_2 \in F \text{ t.że } e = w + \beta_1 p_1 + \beta_2 p_2 \wedge \exists \psi \in F \text{ t.że } e = \psi r + a$$

korzystając z definicji P oraz z definicji $k_{a,r}$ otrzymujemy:

$$e \in P \wedge e \in k_{a,r} \wedge \exists \beta_1, \beta_2 \in F \text{ t.że } e = w + \beta_1 p_1 + \beta_2 p_2 \wedge \exists \psi \in F \text{ t.że } e = \psi r + a$$

więc:

$$\exists e \in P \cap k_{a,r} \wedge \exists \beta_1, \beta_2 \in F \text{ t.że } e = w + \beta_1 p_1 + \beta_2 p_2 \wedge \exists \psi \in F \text{ t.że } e = \psi r + a$$

czyli para $\{\beta_1, \beta_2\}$ jest *położeniem rzutu punktu obserwowanego a* , oraz ψ jest *odległością rzutu punktu obserwowanego a* ■

Opiszemy teraz bryły, które będziemy chcieli obserwować w *przestrzeni obserwowanej X* . Są to bryły będące częścią wspólną pewnej liczby półprzestrzeni:

Def.3.10 *Półprzestrzenią $Z_{(s,d)}$ zakotwiczoną w $s \in X$ i skierowaną w kierunku $d \in X$ będziemy nazywać zbiór:*

$$Z_{(s,d)} \stackrel{def}{=} \{x \in X : (x - s, d) \geq 0\}$$

Def.3.11 *Hiperpowierzchnią $S_{(s,d)}$ zakotwiczoną w $s \in X$ i skierowaną w kierunku $d \in X$ będziemy nazywać zbiór:*

$$S_{(s,d)} \stackrel{def}{=} \{x \in X : (x - s, d) = 0\}$$

Def.3.12 *Bryłą wypukłą Y zawartą w półprzestrzeniach: $Z_{(s_1,d_1)}, Z_{(s_2,d_2)}, \dots, Z_{(s_k,d_k)}$ będziemy nazywać zbiór:*

$$Y \stackrel{def}{=} \left\{ x \in X : x \in \bigcap_{i=1}^k Z_{(s_i,d_i)} \right\}$$

Def.3.13 Niech Y będzie bryłą wypukłą zawartą w półprzestrzeniach $Z_{(s_i,d_i)}$, gdzie $i=1,2,\dots,k$.

Fragment hiperpowierzchni $S_{(s_i,d_i)}$ należący do Y będziemy nazywać *ścianą bryły Y* .

Zastanówmy się chwilę jak światło odbija się od *ściany bryły wypukłej* Y ? Wymiar *przestrzeni obserwowanej* X jak i wymiar *bryły wypukłej* Y ustalmy np. na 7. Wtedy *ściany bryły wypukłej* Y oddzielające wewnątrz bryły od jej zewnątrz będą obiektami 6-wymiarowymi. Należy zauważyć, że światło może się odbić od dowolnego punktu należącego do takiej *ściany*, czyli w przykładowej sytuacji od dowolnego punktu należącego do obiektu 6-wymiarowego (czyli również od „wnętrza” takiego obiektu będącego *ścianą*). Pytanie brzmi: jaką jasność ma mieć światło odbite od danego punktu należącego do *ściany* np. 6-wymiarowej? Dzięki powyższej definicji *hiperpowierzchni* $S_{(s,d)}$ zawierającej *ścianę* odpowiedź jest banalna: jasność zależy od *kierunku skierowania* d *hiperpowierzchni* $S_{(s,d)}$ zawierającej daną *ścianę*, *kierunku rzutowania* r oraz od kierunku z którego biegnie światło.

Zastanówmy się teraz nad innym problemem. Weźmy dowolny punkt e *płaszczyzny obserwacyjnej* P , $e \in P$. Aby stwierdzić która ze *ścian bryły wypukłej* Y jest widoczna z punktu e musimy stwierdzić która z nich jest najbliżej. W tym celu musimy policzyć odległość punktu e od każdej *hiperpowierzchni* zawierającej *ścianę*. Sposób policzenia tej odległości podaje nam twierdzenie 3.5. Wcześniej jednak musimy pokazać, że z dowolnego punktu *płaszczyzny obserwacyjnej* P widoczny jest dokładnie jeden punkt *hiperpowierzchni* $S_{(s,d)}$ (niekoniecznie należący do *bryły wypukłej* Y).

Twierdzenie 3.4

Niech: $P = \delta(w, \{p_1, p_2\})$ - *płaszczyzna obserwacyjna*, $\{p_1, p_2\}$ - układ ortogonalny
 $e \in P$

$r \in X$ - *właściwy kierunek rzutowania na płaszczyznę obserwacyjną* P

$S_{(s,d)} \subset X$ - *hiperpowierzchnia* t.ż. $(r, d) \neq 0$

wtedy: $\exists a \in S_{(s,d)}$ dokładnie jedno t.ż. e jest *rzutem punktu obserwowanego* a zgodnym z *kierunkiem rzutowania* r na *płaszczyznę obserwacyjną* P

Dowód:

1) Istnienie:

przyjmijmy: $\psi = \frac{(e - s, d)}{(r, d)}$ oraz $a = e - \psi r$

przekształcając pierwsze równanie i licząc e z drugiego równania otrzymamy:

$$(e - s, d) = \psi (r, d) \wedge \exists \psi \in F \text{ t.ż. } e = \psi r + a$$

czyli:

$$(e - s, d) - \psi (r, d) = 0 \wedge \exists \psi \in F \text{ t.ż. } e = \psi r + a$$

przekształcając pierwsze równanie i korzystając z definicji $k_{a,r}$ otrzymujemy:

$$(e - \psi r - s, d) = 0 \wedge e \in k_{a,r}$$

na początku dowodu przyjęliśmy $a = e - \psi r$, podstawiając do iloczynu skalarnego otrzymujemy:

$$(a - s, d) = 0 \wedge e \in k_{a,r}$$

z założenia $e \in P$ więc:

$$(a - s, d) = 0 \wedge e \in P \cap k_{a,r}$$

korzystając z definicji *hiperpowierzchni* oraz z definicji *rzutu punktu obserwowanego* mamy:

$a \in S_{(s,d)}$ oraz e jest rzutem punktu obserwowanego a zgodnym z kierunkiem rzutowania r $\square$

2) Jedyność:

hipoteza: $\exists a \neq b$ t.że $e \in P \cap k_{a,r} \wedge e \in P \cap k_{b,r} \wedge a \in S_{(s,d)} \wedge b \in S_{(s,d)}$

korzystając z definicji $k_{a,r}$ oraz z definicji $S_{(s,d)}$ otrzymujemy:

$$\exists \psi_1, \psi_2 \in F \text{ t.że } e = \psi_1 r + a \wedge e = \psi_2 r + b \wedge (a - s, d) = 0 \wedge (b - s, d) = 0$$

więc:

$$a = e - \psi_1 r \wedge b = e - \psi_2 r \wedge (a - s, d) = 0 \wedge (b - s, d) = 0$$

podstawiając policzone a oraz b do iloczynów skalarnych otrzymujemy:

$$a = e - \psi_1 r \wedge b = e - \psi_2 r \wedge (e - \psi_1 r - s, d) = 0 \wedge (e - \psi_2 r - s, d) = 0$$

więc:

$$a = e - \psi_1 r \wedge b = e - \psi_2 r \wedge \psi_1(r, d) = (e - s, d) \wedge \psi_2(r, d) = (e - s, d)$$

z dwóch ostatnich równań liczymy ψ_1 oraz ψ_2 i otrzymujemy:

$$a = e - \psi_1 r \wedge b = e - \psi_2 r \wedge \psi_1 = \psi_2 = \frac{(e - s, d)}{(r, d)}$$

z tego wynika, że $a = b$ czyli hipoteza fałszywa ■

Twierdzenie 3.5

Niech: $P = \delta(w, \{p_1, p_2\})$ - płaszczyzna obserwacyjna, $\{p_1, p_2\}$ - układ ortogonalny

$e \in P$ czyli $\exists \beta_1, \beta_2 \in F$ t.że $e = w + \beta_1 p_1 + \beta_2 p_2$

$r \in X$ - właściwy kierunek rzutowania na płaszczyznę obserwacyjną P

$S_{(s,d)} \subset X$ - hiperpowierzchnia t.że $(r, d) \neq 0$

$a \in S_{(s,d)}$ t.że e jest rzutem punktu obserwowanego a

wtedy: odległość rzutu punktu obserwowanego a wynosi:

$$\psi = \frac{(w + \beta_1 p_1 + \beta_2 p_2 - s, d)}{(r, d)}$$

Dowód:

Na mocy twierdzenia 3.4 wiemy że: $\exists a \in S_{(s,d)}$ t.ż. e jest rzutem punktu obserwowanego a zgodnym z kierunkiem rzutowania r oraz z założenia $e = w + \beta_1 p_1 + \beta_2 p_2$ więc:

$$(a-s, d) = 0 \wedge e \in P \cap k_{a,r} \wedge e = w + \beta_1 p_1 + \beta_2 p_2$$

korzystając z definicji $k_{a,r}$ otrzymujemy:

$$(a-s, d) = 0 \wedge \exists \psi \in F \text{ t.ż. } e = \psi r + a \wedge e = w + \beta_1 p_1 + \beta_2 p_2$$

przyporównajmy otrzymane wzory na e , wtedy:

$$(a-s, d) = 0 \wedge \psi r + a = w + \beta_1 p_1 + \beta_2 p_2$$

czyli:

$$(a-s, d) = 0 \wedge a = w + \beta_1 p_1 + \beta_2 p_2 - \psi r$$

podstawiając policzone a do iloczynu skalarnego otrzymujemy:

$$(w + \beta_1 p_1 + \beta_2 p_2 - \psi r - s, d) = 0$$

zatem:

$$(w + \beta_1 p_1 + \beta_2 p_2 - s, d) - \psi (r, d) = 0$$

więc:

$$(w + \beta_1 p_1 + \beta_2 p_2 - s, d) = \psi (r, d)$$

$$\text{ostatecznie otrzymujemy: } \psi = \frac{(w + \beta_1 p_1 + \beta_2 p_2 - s, d)}{(r, d)} \quad \blacksquare$$

Korzystając z twierdzenia 3.5 możemy sprawdzić dla dowolnego punktu należącego do *płaszczyzny obserwacyjnej* (ekranu) jego odległość w kierunku r od każdej *hiperpowierzchni* zawierającej *ścianę bryły*. Możemy więc sprawdzić która ze *ścian* należących do *bryły* jest najbliższej, czyli która, patrząc w kierunku r z danego punktu *płaszczyzny obserwacyjnej* (ekranu) przesłania inne więc jest widoczna.

Następne twierdzenie będzie nam potrzebne do „rozglądania się” w *przestrzeni obserwowanej* X

Twierdzenie 3.6

Niech: X - przestrzeń obserwowana

$\{q_1, q_2, \dots, q_n\}$ – zbiór ortonormalny wektorów z X

q_i, q_j - dwa dowolne, różne wektory należące do $\{q_1, q_2, \dots, q_n\}$

$\psi_1, \psi_2, \beta_1, \beta_2 \in F$, t.ż. $\psi_1 \in [-1, 1]$, $\psi_2 = \sqrt{1 - \psi_1^2}$, $\beta_1 = \psi_2$, $\beta_2 = -\psi_1$

$$t_1 = \psi_1 q_j + \psi_2 q_i$$

$$t_2 = \beta_1 q_j + \beta_2 q_i$$

wtedy: zbiór powstały w wyniku zamiany wektorów q_i, q_j wektorami t_1, t_2 tzn.

$\{q_1, q_2, \dots, q_{i-1}, t_1, q_{i+1}, \dots, q_{j-1}, t_2, q_{j+1}, \dots, q_n\}$ jest zbiorem ortonormalnym.

Dowód:

1) na początku pokażemy, że powstałe wektory t_1, t_2 są ortonormalne:

$$(t_1, t_2) = (\psi_1 q_j + \psi_2 q_i, \beta_1 q_j + \beta_2 q_i) = \psi_1 \beta_1 (q_j, q_j) + \psi_1 \beta_2 (q_j, q_i) + \psi_2 \beta_1 (q_i, q_j) + \psi_2 \beta_2 (q_i, q_i) =$$

$$\psi_1 \beta_1 + \psi_2 \beta_2 = \psi_1 \sqrt{1 - \psi_1^2} + \sqrt{1 - \psi_1^2} (-\psi_1) = \sqrt{1 - \psi_1^2} (\psi_1 - \psi_1) = 0$$

$$(t_1, t_1) = (\psi_1 q_j + \psi_2 q_i, \psi_1 q_j + \psi_2 q_i) = \psi_1 \psi_1 (q_j, q_j) + \psi_1 \psi_2 (q_j, q_i) + \psi_2 \psi_1 (q_i, q_j) + \psi_2 \psi_2 (q_i, q_i) =$$

$$\psi_1 \psi_1 + \psi_2 \psi_2 = \psi_1^2 + \left(\sqrt{1 - \psi_1^2} \right)^2 = \psi_1^2 + 1 - \psi_1^2 = 1$$

$$(t_2, t_2) = (\beta_1 q_j + \beta_2 q_i, \beta_1 q_j + \beta_2 q_i) = \beta_1 \beta_1 (q_j, q_j) + \beta_1 \beta_2 (q_j, q_i) + \beta_2 \beta_1 (q_i, q_j) + \beta_2 \beta_2 (q_i, q_i) =$$

$$\beta_1 \beta_1 + \beta_2 \beta_2 = \psi_2 \psi_2 + (-\psi_1)(-\psi_1) = \left(\sqrt{1 - \psi_1^2} \right)^2 + \psi_1^2 = 1 - \psi_1^2 + \psi_1^2 = 1 \quad \square$$

2) musimy jeszcze pokazać, że wektory t_1, t_2 są ortogonalne z dowolnym wektorem q_m należącym do zbioru $\{q_1, q_2, \dots, q_n\}$ poza wektorami q_i, q_j , czyli:

$$(t_1, q_m) = (\psi_1 q_j + \psi_2 q_i, q_m) = \psi_1 (q_j, q_m) + \psi_2 (q_i, q_m) = 0$$

$$(t_2, q_m) = (\beta_1 q_j + \beta_2 q_i, q_m) = \beta_1 (q_j, q_m) + \beta_2 (q_i, q_m) = 0 \quad \blacksquare$$

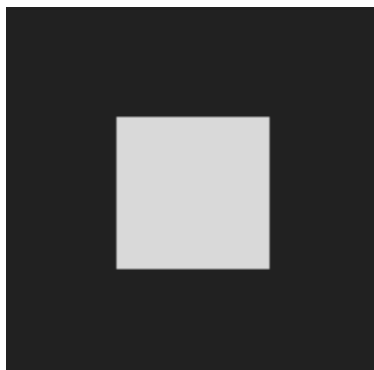
Przyjmijmy, że właściwy *kierunek rzutowania* r jest sumą $n-2$ wektorów $r_0, r_1, \dots, r_{n-3}$ takich, że układ $\{p_1, p_2, r_0, r_1, r_2, \dots, r_{n-3}\}$ jest układem ortonormalnym. Z powyższego twierdzenia wynika, że jeśli weźmiemy dowolną parę wektorów ze zbioru $\{p_1, p_2, r_0, r_1, r_2, \dots, r_{n-3}\}$ i zastąpimy ją parą wektorów t_1, t_2 tak jak w omawianym twierdzeniu, to powstały w ten sposób zbiór również będzie ortonormalny a więc nowy układ $\{p_1, p_2, r\}$ będzie ortogonalny. Czyli zmiana „kierunku patrzenia” polegać będzie na wyborze pary wektorów spośród zbioru $\{p_1, p_2, r_0, r_1, r_2, \dots, r_{n-3}\}$ oraz zastąpieniu jej nową parą. Zmiana taka odpowiada obrotowi w płaszczyźnie utworzonej przez te dwa wektory i stanowi obrót „wokół” podprzestrzeni $n-2$ wymiarowej

3.3. PRZYKŁADY BRYŁ

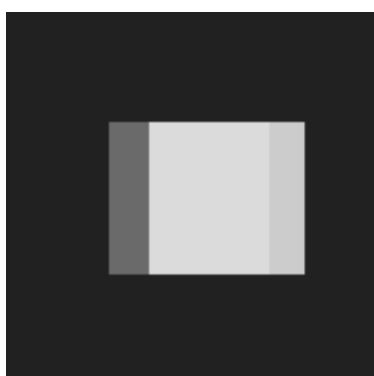
Stosując wyżej opisany model matematyczny zdefiniowano formalnie kilka przykładowych brył wielowymiarowych oraz przedstawiono je na ekranie komputera.

Rysunki o numerach od 3.4 do 3.9 przedstawiają kostkę 4-wymiarową (będącą czterowymiarowym odpowiednikiem sześcianu) oglądaną z różnych stron, przy różnych

ustawieniach *kierunku rzutowania* r . Widać na nich kilka przykładowych konfiguracji sklejonych figur płaskich o różnej jasności, przedstawiających wygląd tej kostki. W wyniku obserwacji zauważono, że jednocześnie można było zobaczyć maksymalnie 4 *ściany*. Stanowi to pewną indywidualną cechę jakościową obserwowanego obiektu. Należy zwrócić uwagę, że kostka taka ma osiem *ścian* a każda z tych *ścian* jest sześcianiem trójwymiarowym. Już w tym momencie u większości ludzi wyobraźnia zawodzi, ponieważ nasze mózgi nie są nauczone do odbioru przestrzeni więcej niż 3-wymiarowej poprzez wzrok, brak im w tym względzie doświadczenia. W tej sytuacji należy spróbować patrzeć z różnych stron na rozważany obiekt wielowymiarowy i uczyć nasz mózg rozumienia takiej bryły.



Rysunek 3.4. Kostka 4-wymiarowa oglądana z odpowiedniej strony i przy odpowiednim kierunku rzutowania r (kwadrat).



Rysunek 3.5. Kostka 4-wymiarowa (3 sklejone prostokąty).



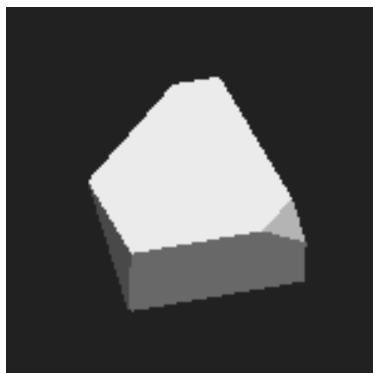
Rysunek 3.6. Kostka 4-wymiarowa (1 trójkąt i 3 pięciokąty).



Rysunek 3.7. Kostka 4-wymiarowa (2 trójkąty, 1 czworokąt, 1 pięciokąt).



Rysunek 3.8. Kostka 4-wymiarowa (3 czworokąty i 1 sześciokąt).

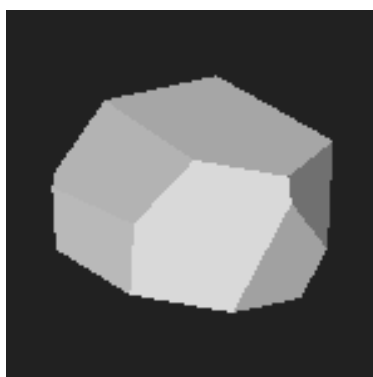


Rysunek 3.9. Kostka 4-wymiarowa (2 trójkąty, 1 pięciokąt, 1 sześciokąt).

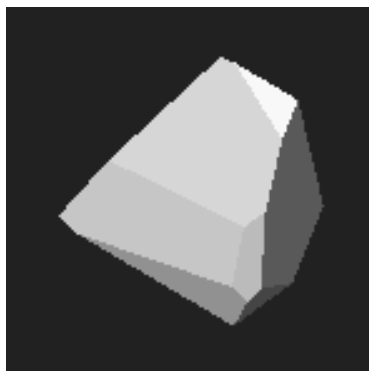
Rysunki o numerach od 3.10 do 3.13 przedstawiają kostkę 7-wymiarową (będącą siedmiowymiarowym odpowiednikiem sześcianu) oglądaną z różnych stron, przy różnych ustawieniach *kierunku rzutowania* r . Widać na nich kilka przykładowych konfiguracji sklejonych figur płaskich o różnej jasności, przedstawiających wygląd tej kostki. W wyniku obserwacji zauważono, że jednocześnie można było zobaczyć maksymalnie 7 *ścian*. Stanowi to pewną indywidualną cechę jakościową obserwowanego obiektu. Zauważmy, że kostka taka ma czternaście *ścian* a każda z tych *ścian* jest kostką sześciowymiarową.



Rysunek 3.10. Kostka 7-wymiarowa (3 czworokąty i 2 pięciokąty).



Rysunek 3.11. Kostka 7-wymiarowa (4 czworokąty, 1 pięciokąt, 1 sześciokąt).



Rysunek 3.12. Kostka 7-wymiarowa (1 trójkąt, 2 czworokąty, 3 pięciokąty, 1 sześciokąt).



Rysunek 3.13. Kostka 7-wymiarowa (1 trójkąt, 1 czworokąt, 4 pięciokąty, 1 sześciokąt).

Więcej uzyskanych widoków przedstawionych brył pokazano w dodatku A.

4. IMPLEMENTACJA SYSTEMU DO WIZUALIZACJI OBIEKTÓW WIELOWYMIAROWYCH (BRYŁ WYPUKŁYCH)

4.1. PROJEKT SYSTEMU

Budowę systemu stanowiącego w tej pracy autorską propozycję narzędzia do „patrzenia” w przestrzeniach wielowymiarowych oparto na programowaniu o charakterze zdarzeniowym, polegającym na tym że program konstruuje się jako zestaw funkcji obsługi, wywoływanych przez system operacyjny w momencie wystąpienia jakiegoś interesującego nas zdarzenia (np. wciśnięcie przycisku myszy, wybranie opcji z menu, użycie klawiatury, poruszenie myszą, itp.). System służący do wizualizacji bryły n -wymiarowej musi realizować następujące zadania:

- 1) przechowywanie w pamięci komputera opisu bryły n -wymiarowej w odpowiedniej formie z wykorzystaniem odpowiednich struktur danych.
- 2) zmiana punktu widzenia obserwowanej bryły, poprzez przemieszczanie obserwatora w przestrzeni n -wymiarowej.
- 3) rysowanie bryły widzianej z danego miejsca przestrzeni.

4.1.1. STRUKTURY DANYCH

Na podstawie definicji 3.1 przyjęto, że *przestrzeń obserwowana* X jest przestrzenią wektorową nad ciałem F , n -wymiarową, $n \geq 3$, z iloczynem skalarnym. Ustalono wektory $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ będące ortonormalną bazą przestrzeni X . Ponadto ustalono, że ciało F będzie ciałem liczb rzeczywistych i iloczyn skalarny będzie dany wzorem:

$$(p, q) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n p_i q_i \quad \text{gdzie } p, q \in X, \quad p = \sum_{i=1}^n p_i x_i, \quad q = \sum_{i=1}^n q_i x_i$$

Bryła wypukła Y zgodnie z definicją 3.12 jest częścią wspólną pewnej liczby półprzestrzeni. Natomiast wg definicji 3.10 każdą półprzestrzeń $Z_{(s,d)}$ określają w sposób jednoznaczny dwa wektory: $s, d \in X$. W celu opisanie bryły wypukłej przyjęto zatem następujące struktury danych:

```
struct TYP_WEKTOR
{
    double X[MAX_WYMIAR];
};
struct TYP_POLPRZESTRZEN
{
    struct TYP_WEKTOR S,D;
```

```

};
struct TYP_BRYLA
{
    int LICZBA_SCIAN;
    struct TYP_POLPRZESTRZEN POLPRZ[MAX_SCIAN];
};

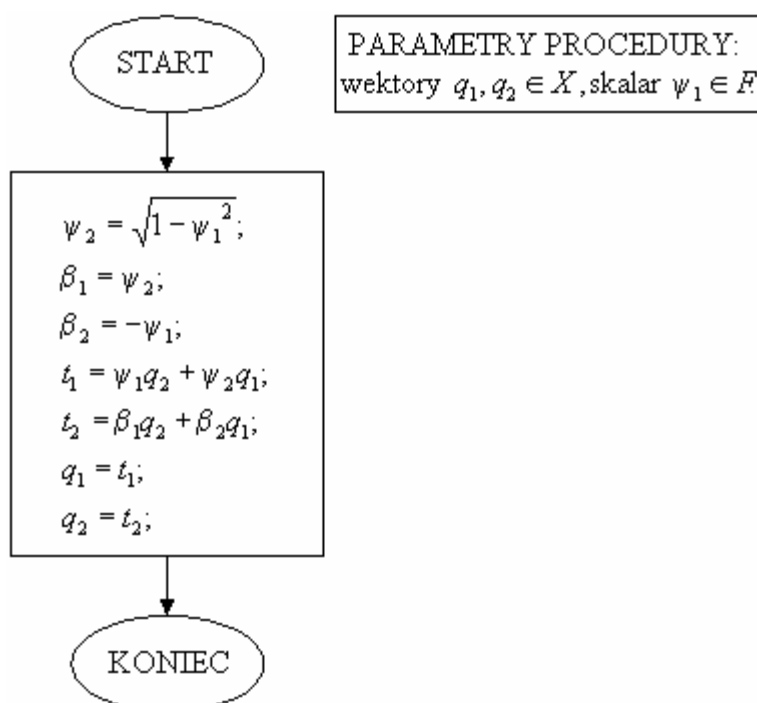
```

4.1.2. ZMIANA PUNKTU WIDZENIA W PRZESTRZENI n -WYMIAROWEJ

Zgodnie z definicją 3.4 *plaszczynę obserwacyjną* $P=\mathcal{X}(w,\{p_1,p_2\})$ w sposób jednoznaczny określają trzy wektory. Dodatkowo na podstawie definicji 3.4 i definicji 3.5 wiemy, że aby wektor r był *właściwym kierunkiem rzutowania*, wektory $\{p_1,p_2,r\}$ muszą być układem ortogonalnym. Z powyższych faktów wynika że zmianę punktu widzenia dokonuje się poprzez zmianę wektorów: w,p_1,p_2,r . Zmianę tą możemy podzielić na dwa rodzaje:

1) Zmiana położenia obserwatora – następuje poprzez przesunięcie płaszczyzny obserwacyjnej o dany wektor $y \in X$. Jest to najprostsza operacja, bowiem w celu jej wykonania wystarczy zmienić wektor w dodając do niego wektor y .

2) Zmiana „kierunku patrzenia” – następuje poprzez zmianę wartości wektorów p_1,p_2,r tak by również po zmianie wektory p_1,p_2,r były układem ortogonalnym. Przyjęto, że wektor r jest sumą $n-2$ wektorów $r_0,r_1,\dots,r_{n-3}$ takich, że układ $\{p_1,p_2,r_0,r_1,r_2,\dots,r_{n-3}\}$ jest układem ortonormalnym. Na podstawie twierdzenia 3.6 wiemy, że jeśli weźmiemy dowolną parę



Rysunek 4.1. Ciąg instrukcji służący zmianie dwóch wektorów q_1, q_2 zależnie od parametru ψ_1 . Zmiana taka odpowiada obrotowi w płaszczyźnie utworzonej przez te wektory.

wektorów q_1, q_2 ze zbioru $\{p_1, p_2, r_0, r_1, r_2, \dots, r_{n-3}\}$ i zastąpimy ją parą wektorów t_1, t_2 , gdzie:

$$t_1 = \psi_1 q_2 + \psi_2 q_1, \quad t_2 = \beta_1 q_2 + \beta_2 q_1, \quad \psi_1 \in [-1, 1], \quad \psi_2 = \sqrt{1 - \psi_1^2}, \quad \beta_1 = \psi_2, \quad \beta_2 = -\psi_1,$$

to powstały w ten sposób zbiór również będzie ortonormalny a więc nowy układ $\{p_1, p_2, r\}$ będzie ortogonalny. W związku z powyższym zmiana „kierunku patrzenia” polegać będzie na wyborze pary wektorów spośród zbioru $\{p_1, p_2, r_0, r_1, r_2, \dots, r_{n-3}\}$ oraz zastąpieniu jej nową parą. Zmiana taka będzie następowała w wyniku naciśnięcia klawisza przyporządkowanego danej parze. Spowoduje to obrót w płaszczyźnie utworzonej przez te wektory.

4.1.3. RYSOWANIE BRYŁY

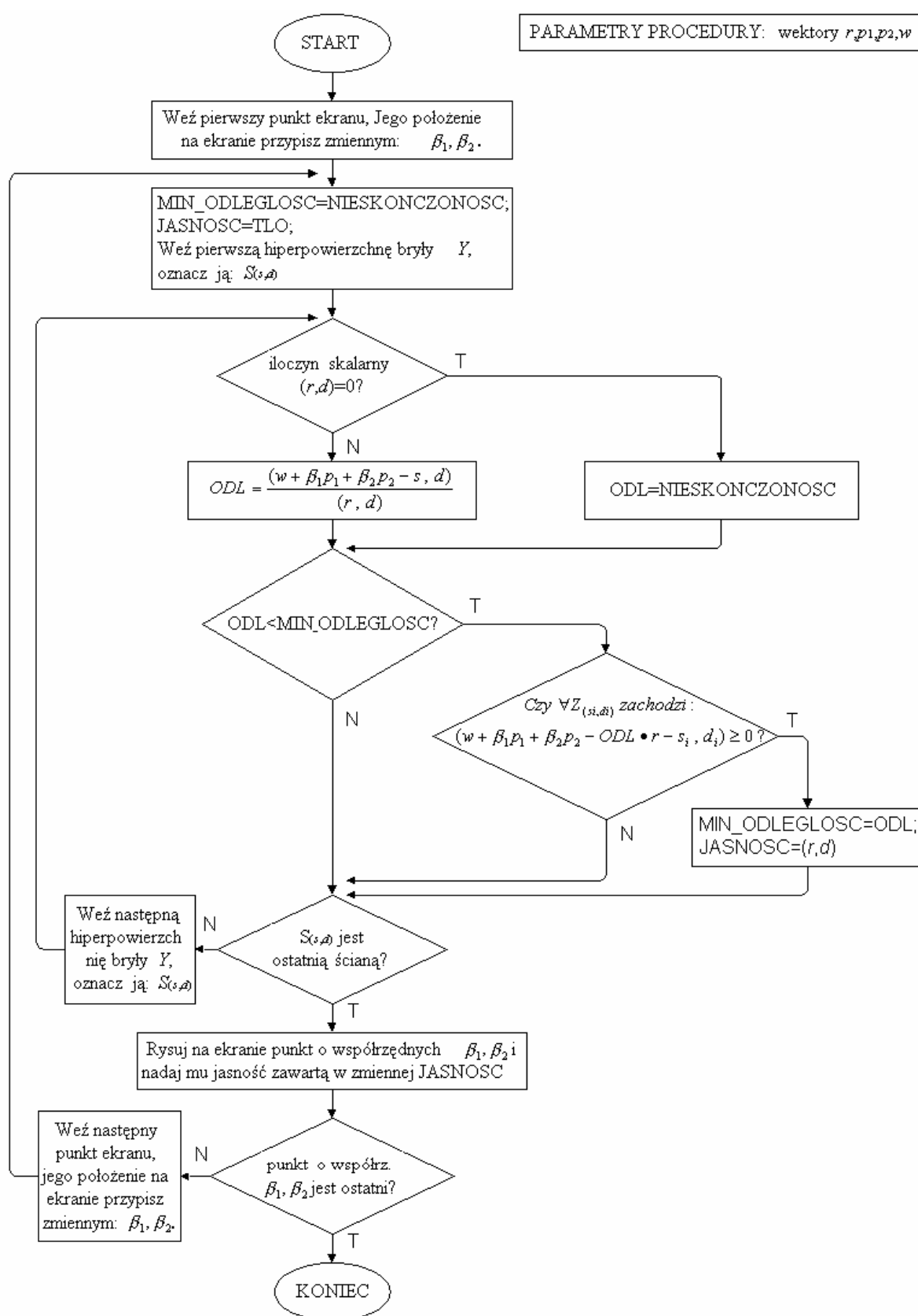
Płaszczyznę obserwacyjną $P = \delta(w, \{p_1, p_2\})$ w rzeczywistości reprezentujemy poprzez dyskretną siatkę punktów, możliwą do przedstawienia na ekranie graficznym. Dla każdego punktu takiej siatki (o współrzędnych β_1, β_2 względem siatki) możemy na podstawie twierdzenia 3.5 policzyć jego odległość ψ w kierunku r od każdej *hiperpowierzchni* $S_{(s,d)}$ zawierającej *ścianę bryły*. Dokonujemy tego przy pomocy wzoru:

$$\psi = \frac{(w + \beta_1 p_1 + \beta_2 p_2 - s, d)}{(r, d)}$$

Możemy więc sprawdzić która ze *ścian* należących do *bryły* jest najbliższej, czyli która, patrząc w kierunku r z danego punktu *płaszczyzny obserwacyjnej* (ekranu) przesłania inne więc jest widoczna.

Fakt iż dana *hiperpowierzchnia* jest najbliższej w kierunku r nie jest wystarczający – należy dodatkowo sprawdzić czy punkt *a hiperpowierzchni* widoczny w kierunku r należy do *ściany bryły* czyli do fragmentu *hiperpowierzchni* należącego do *bryły*. Można to zrealizować z definicji *bryły* (definicja 3.12) poprzez sprawdzenie czy dany punkt a należy do każdej *półprzestrzeni* tworzącej *bryłę*. Wystarczy więc sprawdzić czy: $\forall Z_{(s_i, d_i)} \text{ zachodzi } (a - s_i, d_i) \geq 0$, gdzie $i=1..k$ oraz $Z_{(s_1, d_1)}, Z_{(s_2, d_2)}, \dots, Z_{(s_k, d_k)}$ - *półprzestrzenie* w których zawarta jest *bryła* wypukła Y .

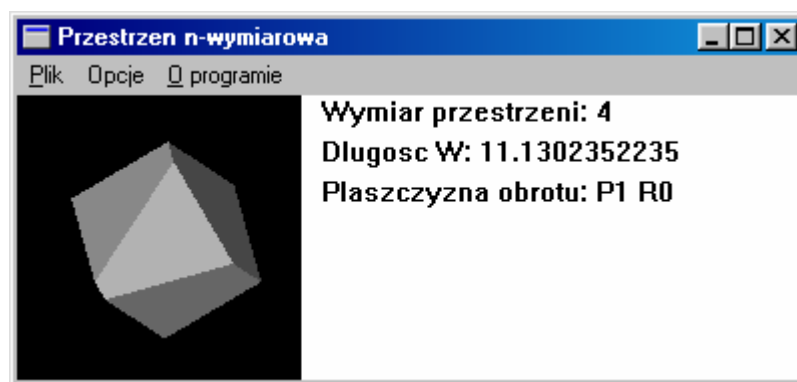
Pozostaje ostatni problem: w jaki sposób światło odbija się od *ściany bryły wypukłej* Y ? Przyjęto że patrząc w kierunku r jasność świecenia punktu *hiperpowierzchni* $S_{(s,d)}$ jest wprost proporcjonalna do wartości iloczynu skalarnego (r, d) . Sposób działania całej wyżej opisanej procedury rysującej *bryłę*, został przedstawiony w postaci schematu blokowego na rysunku 4.2. Procedurę tą system będzie wywoływać po każdej zmianie jednego z wektorów w, p_1, p_2, r .



Rysunek 4.2. Schemat blokowy procedury rysującej bryłę wypukłą.

4.2. SPOSÓB UŻYTKOWANIA

Niżej opisany system został opracowany w oparciu o teorię z rozdziału 3. Służy on do oglądania dowolnych brył wypukłych, których wymiar nie przekracza 7 a liczba ścian 30. Jest napisany w języku C, przygotowany do pracy w systemie Windows, skompilowany w środowisku Borland C++. Pracę z systemem rozpoczynamy od wczytania pliku z opisem bryły. Następuje to poprzez wybranie z głównego menu opcji PLIK a następnie CZYTAJ. Parametry pracy możemy zmieniać przy pomocy opcji PARAMETRY. Poruszanie się po n -wymiarowej przestrzeni w celu zmiany punktu widzenia, następuje poprzez użycie odpowiednich klawiszy. Okno systemu składa się z dwóch zasadniczych części: okna graficznego, które służy do przedstawiania wyglądu oglądanej bryły oraz okna tekstowego, na którym pojawiają się pewne informacje tekstowe.



Rysunek 4.3. Wygląd okna systemu składającego się z dwóch części: graficznej i tekstowej.

4.2.1. DANE WEJŚCIOWE

Opis bryły którą chcemy oglądać, wczytywany jest z pliku o rozszerzeniu „.dat” w którym informacje zapisane są w następującym formacie:

1) nagłówek:

- 1** - (wartość typu integer) stała wynosząca jeden, oznacza że plik opisuje bryłę,
- n** - (wartość typu integer) wymiar bryły (maksymalnie 7),
- k** - (wartość typu integer) liczba półprzestrzeni definiujących bryłę (maksymalnie 30).

2) parametry określające k półprzestrzeni definiujących konkretną bryłę:

- wektor s_1** - (n wartości typu float) współrzędne wektora s_1 półprzestrzeni $Z_{(s_1,d_1)}$,
- wektor d_1** - (n wartości typu float) współrzędne wektora d_1 półprzestrzeni $Z_{(s_1,d_1)}$,
- ...
- wektor s_k** - (n wartości typu float) współrzędne wektora s_k półprzestrzeni $Z_{(s_k,d_k)}$,

wektor d_k - (n wartości typu float) współrzędne wektora d_k półprzestrzeni $Z_{(sk,dk)}$,

gdzie $Z_{(s1,d1)}$, $Z_{(s2,d2)}$, ..., $Z_{(sk,dk)}$ - półprzestrzenie w których zawarta jest definiowana bryła (zgodnie z definicją 3.12). Jak łatwo zauważyć, plik ma poprawny format jeśli po trzech wartościach typu integer zawiera $2*n*k$ wartości typu float. Przykładowa procedura generująca plik z bryłą wypukłą zawartą w strukturze **BRYLA** (typu **struct TYP_BRYLA** opisanego w punkcie 4.1.1) wygląda następująco:

```
int zapisz_plik(char nazwa[])
{
    float wx;
    int i,j;
    FILE *w_pliku;

    w_pliku = fopen(nazwa,"wb"); if (w_pliku==NULL) return 1;

    fprintf(w_pliku,"%d\n",1); // typ obiektów
    fprintf(w_pliku,"%d\n",WYMIAR); // liczba wymiarów
    fprintf(w_pliku,"%d\n",BRYLA.LICZBA_SCIAN); // liczba ścian
    for (i=0;i<(BRYLA.LICZBA_SCIAN);i++)
    {
        for (j=0;j<WYMIAR;j++)
        {
            wx=BRYLA.POLPRZ[i].S.X[j];
            fprintf(w_pliku,"%f\n",wx);
        }
        for (j=0;j<WYMIAR;j++)
        {
            wx=BRYLA.POLPRZ[i].D.X[j];
            fprintf(w_pliku,"%f\n",wx);
        }
    }
    fclose(w_pliku);
    return 0;
}
```

Wczytanie pliku z opisem bryły następuje poprzez wybranie z głównego menu opcji **PLIK** a następnie **CZYTAJ**.

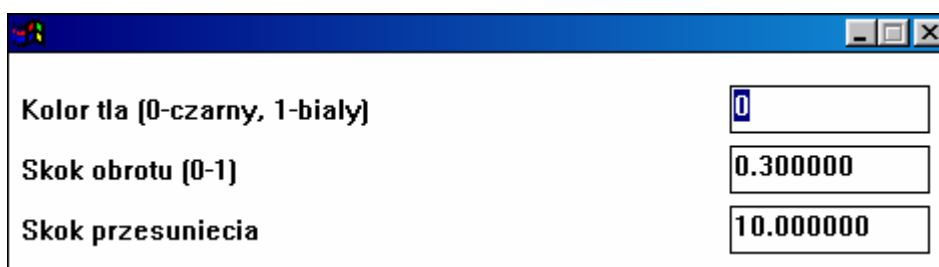
4.2.2. PARAMETRY

Wybierając w menu opcję **PARAMETRY** możemy zmieniać pewne ustawienia programu, mianowicie:

1) **KOLOR TŁA** – zmieniając ten parametr możemy wybrać białe lub czarne tło na którym przedstawiana będzie oglądana bryła.

2) SKOK OBROTU – parametr reprezentujący kąt obrotu o jaki zmieni się „kierunek patrzenia” w wyniku naciśnięcia jednego z klawiszy przyporządkowanych takiej zmianie.

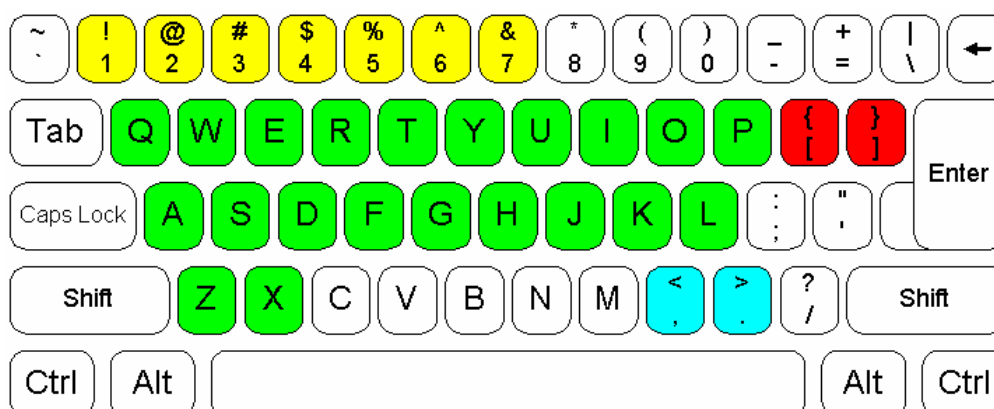
3) SKOK PRZESUNIĘCIA – określa wielkość przemieszczenia obserwatora w wyniku użycia jednego z klawiszy powodujących zmianę jego położenia.



Rysunek 4.4. Wygląd okna wywoływanego w celu zmiany parametrów.

4.2.3. FUNKCJE KLAWISZY

W celu zmiany punktu widzenia możemy się poruszać po n -wymiarowej przestrzeni poprzez użycie odpowiednich klawiszy.



Rysunek 4.5. Kolorami oznaczono klawisze służące do poruszania się po n -wymiarowej przestrzeni. (1) kolor żółty – klawisze służące zmianie położenia wzdłuż osi współrzędnych, (2) kolor niebieski – zmiana położenia wzdłuż kierunku rzutowania r , (3) kolor czerwony – zmiana położenia wzdłuż osi płaszczyzny obserwacyjnej, (4) kolor zielony – zmiana „kierunku patrzenia”.

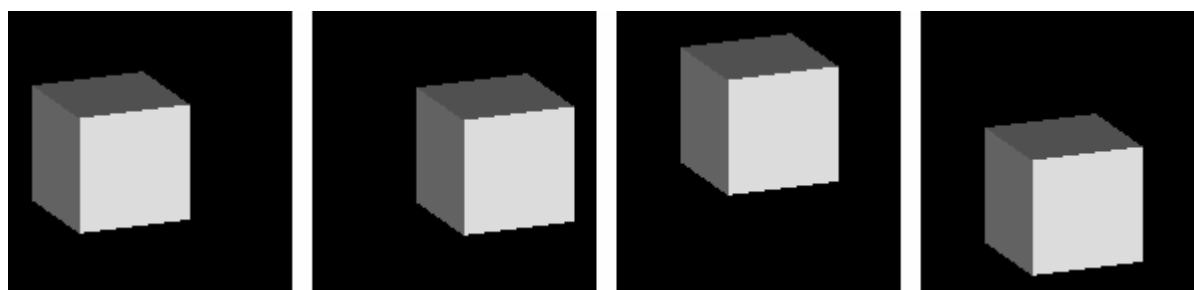
1) Zmiana położenia wzdłuż osi współrzędnych – służą do tego klawisze z podstawowej klawiatury, oznaczone cyframi 1,2,3,...,7. Przemieszczenie wzdłuż i -tej osi współrzędnych następuje poprzez wciśnięcie klawisza z cyfrą i , czyli przemieszczenie wzdłuż osi nr 1 po wciśnięciu klawisza z cyfrą 1, wzdłuż osi nr 2 po wciśnięciu klawisza z cyfrą 2, itd. Liczba aktywnych klawiszy zależy bezpośrednio od liczby wymiarów – dla bryły np. czterowymiarowej aktywne są klawisze 1,2,3,4. Wartość przemieszczenia, które następuje

przy jednokrotnym użyciu odpowiedzialnego za to klawisza, zawarta jest w parametrze SKOK PRZESUNIĘCIA. Jeśli natomiast użyjemy tego klawisza łącznie z klawiszem SHIFT to przemieszczenie nastąpi o ujemną wartość parametru SKOK PRZESUNIĘCIA, czyli w przeciwną stronę.

2) Zmiana położenia wzdłuż *kierunku rzutowania* r – przemieszczenie następuje poprzez wciśnięcie klawisza ze znakiem „<” (przemieszczenie „do przodu”) lub „>” (przemieszczenie „do tyłu”). Wartość przemieszczenia, które następuje przy jednokrotnym użyciu klawisza, zawarta jest w parametrze SKOK PRZESUNIĘCIA.

3) Zmiana położenia wzdłuż osi p_1, p_2 *płaszczyzny obserwacyjnej* P . Przemieszczenie obserwatora następuje poprzez wciśnięcie następujących klawiszy:

- klawisz „[” - przemieszczenie w prawo,
- klawisz „]” - przemieszczenie w lewo,
- klawisz „{” - przemieszczenie w dół,
- klawisz „}” - przemieszczenie w górę.



Rysunek 4.6. Przedstawiono efekt użycia klawiszy odpowiedzialnych za zmianę położenia wzdłuż osi *płaszczyzny obserwacyjnej* P . Rysunki kolejno od lewej przedstawiają przemieszczenie obserwatora: (1) w prawo, (2) w lewo, (3) w dół, (4) w górę.

Wartość przemieszczenia, które następuje przy jednokrotnym użyciu klawisza, zawarta jest w parametrze SKOK PRZESUNIĘCIA.

4) Zmiana „kierunku patrzenia” - jak już wspomniano w punkcie 4.1.2 następuje poprzez odpowiednią zmianę pary wektorów z ortonormalnego zbioru $\{p_1, p_2, r_0, r_1, r_2, \dots, r_{n-3}\}$. Przypomnijmy, że p_1, p_2 oznaczają wektory definiujące *płaszczyznę obserwacyjną* a suma wektorów $r_0, r_1, r_2, \dots, r_{n-3}$ stanowi wektor będący *właściwym kierunkiem rzutowania* r . Każdej parze przyporządkowano odpowiedni klawisz, ustalając pewną kolejność par oraz pewną kolejność klawiszy. Ustalono dla zbioru $\{p_1, p_2, r_0, r_1, r_2, \dots, r_{n-3}\}$ kolejność par w następujący sposób:

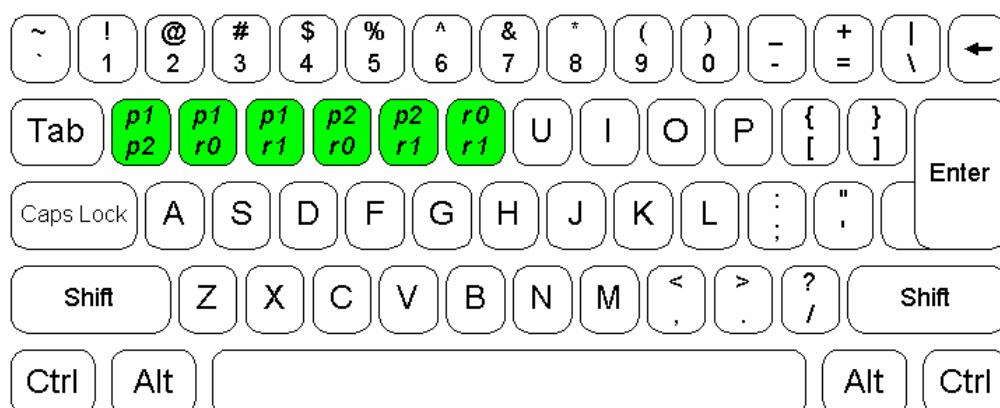
$\{p_1, p_2\}, \{p_1, r_0\}, \{p_1, r_1\}, \dots, \{p_1, r_{n-3}\},$

$\{p_2, r_0\}, \{p_2, r_1\}, \{p_2, r_2\}, \dots, \{p_2, r_{n-3}\},$
 $\{r_0, r_1\}, \{r_0, r_2\}, \{r_0, r_3\}, \dots, \{r_0, r_{n-3}\},$

...

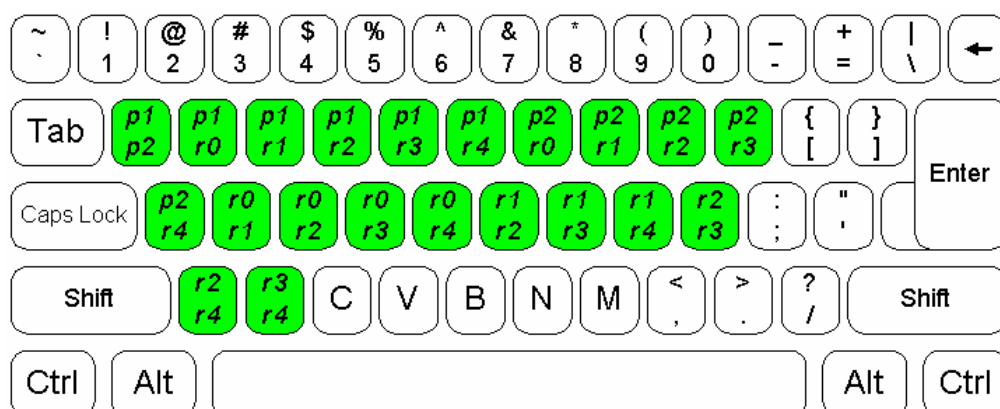
 $\{r_{n-4}, r_{n-3}\}$

Kolejnej parze przyporządkowany został kolejny klawisz z oznaczeniem literowym. Kolejność klawiszy z literami ustalono wg ich fizycznego położenia na klawiaturze, z lewa na prawo oraz z góry na dół, czyli: qwertuiopasdfghjklzx. Aktywnych jest tyle klawiszy ile jest dwuelementowych podzbiorów zbioru $\{p_1, p_2, r_0, r_1, r_2, \dots, r_{n-3}\}$, czyli: $n(n-1)/2$. Na rysunkach 4.7. i 4.8. przedstawiono dla przykładu, przyporządkowanie parom wektorów klawiszy dla przestrzeni 4-wymiarowej i 7-wymiarowej.



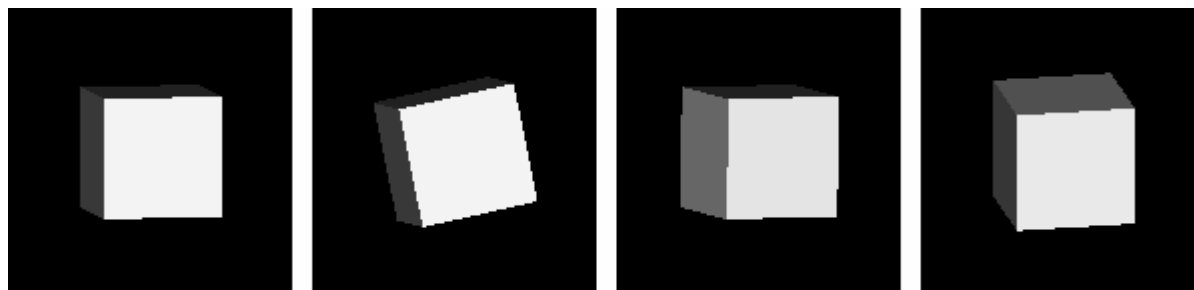
Rysunek 4.7. Klawisze służące do zmiany „kierunku patrzenia” w przestrzeni czterowymiarowej.

Zmiana wybranej pary wektorów, która następuje przy jednokrotnym użyciu odpowiedzialnego za to klawisza, zawarta jest w parametrze SKOK OBROTU i oznacza obrót w płaszczyźnie wyznaczonej przez tą parę wektorów.



Rysunek 4.8. Klawisze służące do zmiany „kierunku patrzenia” w przestrzeni siedmiowymiarowej.

Jeśli natomiast użyjemy tego klawisza łącznie z klawiszem SHIFT to zmiana nastąpi o ujemną wartość parametru SKOK OBROTU, co oznacza obrót w przeciwną stronę.



Rysunek 4.9. Przedstawiono efekt użycia klawiszy odpowiedzialnych za zmianę „kierunku patrzenia” w przestrzeni 3-wymiarowej. Rysunki kolejno od lewej przedstawiają: (1) sytuacja wyjściowa, (2) zmiana wektorów $p1$ $p2$, (3) zmiana wektorów $p1$ $r0$, (4) zmiana wektorów $p2$ $r0$.

Jeżeli zmianie ulega para wektorów wśród których znajduje się wektor p_1 lub p_2 , oznacza to zmianę ustawienia *płaszczyzny obserwacyjnej* (ekranu). Jeśli natomiast zmianie ulega para wektorów wśród których znajduje się wektor r_i , dla $i=0..n-3$, oznacza to zmianę ustawienia *właściwego kierunku rzutowania* r .

4.2.4. OKNO TEKSTOWE

W oknie tekstowym pojawiają się następujące informacje:

- WYMIAR PRZESTRZENI - określa liczbę wymiarów przestrzeni w której znajduje się obserwowana bryła,
- DŁUGOŚĆ W - określa odległość płaszczyzny obserwacyjnej od środka układu współrzędnych,
- PŁASZCZYZNA OBROTU – przedstawia parę wektorów, które brały udział w ostatniej zmianie „kierunku patrzenia”.

4.2.5. OKNO GRAFICZNE

W tym oknie pojawia się wygląd oglądanej bryły. Wielkość okna graficznego możemy zmieniać rozciągając okno systemu kursorem myszy. Bezpośrednio od wielkości okna graficznego zależy szybkość działania programu, bowiem procedura rysująca bryłę, dla każdego punktu okna graficznego liczy jego jasność. Nie należy więc stosować większego okna, niż jest aktualnie potrzebne dla poprawnej orientacji w kształcie bryły, bo powoduje to znaczące pogorszenie sprawności obliczeniowej programu.

5. PROBLEM WIZUALIZACJI WIELOWYMIAROWYCH ZBIORÓW DANYCH DYSKRETYCH

Zdarza się, że bardzo złożoną rzeczywistość trzeba koniecznie rozpatrywać, biorąc pod uwagę dużą liczbę aspektów. Hurtownie danych będące dużymi analitycznymi bazami danych, służącymi wszelkiego rodzaju analizom, często stanowią cenne źródło danych – jednak z reguły wielowymiarowych. Pozyskanie z takiej bazy konkretnych informacji może być ułatwione poprzez możliwość jakościowej oceny tych danych. W dalszej części tego rozdziału zostaną przedstawione przykłady zagadnień wymagających jakościowego (poglądowego) analizowania zbiorów danych wielowymiarowych.

5.1. ROZPOZNAWANIE OBRAZÓW

Teoria rozpoznawania obrazów rozwinęła się wraz z badaniami związanymi ze sztuczną inteligencją, mającymi na celu uzyskanie od komputerów działań podobnych do tych, jakie realizuje człowiek za pomocą swojej inteligencji (literatura [32]). Zadanie rozpoznawania obrazów w ogólnym przypadku polega na określeniu przynależności rozmaitego rodzaju obiektów do pewnych klas. Ma to nastąpić w sytuacji, w której jedyną wiedzą jaką dysponujemy na temat wymaganych form działania algorytmu rozpoznającego zawarta jest w ciągu uczącym, złożonym z obiektów dla których znana jest prawidłowa klasyfikacja – ale nie reguły rządzące tą klasyfikacją.

Oznaczmy przez Z zbiór obiektów podlegających rozpoznawaniu. Przyjmijmy, że istnieje na tym zbiorze relacja równoważności $K \subset Z \times Z$ dzieląca zbiór Z na klasy Z^i takie, że:

$$Z = \bigcup_{i \in I} Z^i, \quad \text{gdzie } I - \text{zbiór indeksów klas.}$$

Zadanie rozpoznawania polega na znalezieniu odwzorowania $g: Z \rightarrow I$, przyporządkowującego rozpoznawanemu obiektowi ze zbioru Z numer klasy równoważności, do której ten obiekt należy. W klasycznych metodach rozpoznawania obrazów (literatura [32]) odwzorowanie g realizowane jest jako złożenie trzech odwzorowań $g = c \bullet b \bullet a$, gdzie :

1) $a: Z \rightarrow X$ nazywane *recepcją* - odwzorowanie to przyporządkowuje obiektowi ze zbioru Z punkt w wielowymiarowej *przestrzeni cech* X . Liczba wymiarów przestrzeni X zależy od liczby rozpatrywanych cech rozpoznawanych obiektów ze zbioru Z .

2) $b: X \rightarrow \mathcal{H}^L$ oznacza obliczanie wartości tzw. *funkcji przynależności*. Odwzorowanie to przyporządkowuje punktowi z przestrzeni cech (pewnemu nieznanemu obiektowi

podlegającemu rozpoznawaniu) pewną miarę „podobieństwa” do poszczególnych klas Z^i , gdzie L oznacza liczbę klas. Czyli „podobieństwo” możemy tu przedstawić jako wektor złożony z L liczb rzeczywistych,

3) $c: \mathcal{H}^L \rightarrow I$ oznacza proces podejmowania decyzji, w wyniku którego wartościom funkcji przynależności przyporządkowywany jest numer klasy, do której badany obiekt należy.

W opisanym powyżej procesie rozpoznawania, istotną rolę odgrywa wybór cech branych pod uwagę przy konstrukcji wielowymiarowej przestrzeni X . Bowiem poprawność dalszego procesu rozpoznawania zależy bezpośrednio od wzajemnego rozmieszczenia poszczególnych klas w tej przestrzeni. Dodatkowe utrudnienie jest spowodowane tym, że niepowodzenie algorytmu rozpoznającego wcale nie musi świadczyć o złym wyborze przestrzeni cech X . Konieczna wtedy staje się możliwość **jakościowej** analizy rozmieszczenia w przestrzeni X zbiorów punktów, reprezentujących poszczególne klasy.

Możliwość powstania skutecznego algorytmu rozpoznającego, uzależniona jest bezpośrednio od następujących jakościowych własności zbiorów punktów będących reprezentantami poszczególnych klas:

1) Zachodzenie na siebie zbiorów, czyli częściowe lub całkowite pokrywanie się podobszarów przestrzeni cech przynależących do poszczególnych zbiorów. Wystąpienie tego zjawiska świadczy o tym, że cechy wybrane do reprezentacji rozpoznawanych obiektów, nie są do tego wystarczające. Rozwiązaniem tego problemu może być inny dobór cech, z których konstruujemy przestrzeń cech X . Jeśli dobór innych cech nie jest możliwy oznacza to, że dany problem rozpoznawania jest nierozwiązywalny.

2) Występowanie punktów będących zakłóceniami. Mogą one powstać np. w wyniku złego przyporządkowania niektórych obiektów do niewłaściwych klas w trakcie tworzenia ciągu uczącego. Jeśli analiza jakościowa pozwoliłaby zauważyć punkty będące zakłóceniami, wtedy można by je pominąć w dalszej analizie. Dzięki temu można uniknąć sytuacji w której na podstawie zakłóceń wyciągnięte zostają błędne wnioski, prowadzące do powstania błędnej procedury rozpoznającej.

3) Niejednoznaczność zbioru punktów reprezentujących daną klasę. Zauważenie tej własności pozwala uniknąć sytuacji, w której procedura rozpoznająca „na siłę” stara się objąć punkty należące w istocie do kilku klas jednym spójnym obszarem. Jest to istotne szczególnie wtedy, gdy pomiędzy dwoma obszarami zawierającymi punkty reprezentujące daną klasę, znajduje się obszar zawierający punkty reprezentujące inną klasę.

Analiza jakościowa struktury zbioru danych uczących w przestrzeni cech X , mogłaby pozwolić na bezpośrednie zaobserwowanie powyższych własności oraz na skorygowanie zadań stawianych w efekcie algorytmom rozpoznawania.

5.2. EKONOMIA

Ekonometria jest dziedziną nauki zajmującą się badaniem zależności pomiędzy zmiennymi reprezentującymi procesy i zjawiska ekonomiczne, na podstawie materiału empirycznego. Ponieważ zjawiska te są bardzo złożone, postrzegając je operujemy w sposób mniej lub bardziej świadomy wieloma wymiarami danych (literatura [36], [33]). Dla celów ekonomii opracowano wiele metod służących ukazaniu struktury danych opisujących złożone zagadnienia, poprzez analizę wielowymiarowej przestrzeni, w której punkty odpowiadają badanym obiektom. Jednak metody te są na ogół metodami ilościowymi. Istota metod opisywanych w tej pracy umożliwia **jakościową** analizę danych wielowymiarowych w opisanych niżej przykładowych problemach.

5.2.1. OCENA KONDYCJI FIRMY

Kondycję firmy opisuje wiele wskaźników ekonomiczno-finansowych oraz rynkowych. Uzyskanie z tej licznej grupy wskaźników obiektywnej oceny w postaci jednej syntetycznej miary bywa często bardzo złożone. Jedną z metod wykorzystywanych do rozwiązania tego problemu jest analiza dyskryminacyjna. Polega ona na przyporządkowaniu danej obserwacji do jednej z wcześniej ustalonych grup. Stan firmy reprezentowany jest przez punkt w wielowymiarowej przestrzeni w której każdy ze wskaźników opisujących firmę stanowi jeden wymiar. Poszczególne grupy reprezentowane są poprzez punkty odpowiadające firmom będącym reprezentantami tych grup. Przyporządkowanie do danej grupy można zrealizować dzieląc przestrzeń przy pomocy odpowiedniej funkcji dyskryminacyjnej. Problemem jest wybór funkcji potrafiącej odpowiednio podzielić omawianą przestrzeń.

Położenie punktu reprezentującego badaną firmę w obszarze występowania punktów reprezentujących firmy dobrze prosperujące, świadczy o jej dobrej kondycji. Jakościowa obserwacja takiej przestrzeni mogłaby pozwolić stwierdzić w sposób bezpośredni, w obrębie której grupy punktów znajduje się punkt reprezentujący badaną firmę.

5.2.2. SEGMENTACJA RYNKU

Rynki składają się z nabywców o różnych potrzebach. Segmentacja rynku polega na podziale rynku na klasy nabywców. Następuje to na podstawie podobieństwa wybranych

kryteriów charakteryzujących klientów. Dzięki segmentacji można ocenić atrakcyjność rynkową uzyskanych grup konsumentów. Przedsiębiorstwo może dotrzeć do odpowiedniej grupy konsumentów, dostosować produkt do ich potrzeb oraz zauważyć różnego rodzaju zmiany w preferencjach.

Klient reprezentowany jest przez punkt w wielowymiarowej przestrzeni w której każdy z kryteriów go charakteryzujących stanowi jeden wymiar. W takiej sytuacji segmentacja polega na zauważeniu pewnych skupisk punktów reprezentujących grupy konsumentów. Analiza jakościowa takiej przestrzeni mogłaby pozwolić na bezpośrednie zaobserwowanie tych skupisk.

5.2.3. WYKRYWANIE LUKI NA RYNKU

Jedną ze strategii marketingowych jest poszukiwanie luki rynkowej, czyli nowej pozycji w świadomości klientów, odpowiadającej pożądanemu towarowi lub usłudze – których brak. Sposób w jaki konsumenci postrzegają produkty można przedstawić w postaci wielowymiarowej przestrzeni. Umożliwia ona obserwację cech towarów, które są dla klientów najbardziej pożądane. Każdy wymiar tej przestrzeni określa konkretną cechę towaru postrzeganą przez klientów. Analiza jakościowa takiej przestrzeni może pomóc w znalezieniu odpowiednich obszarów, które nie są wypełnione punktami. Obszary te mogą stanowić poszukiwaną lukę rynkową, czyli mogą sugerować odpowiednie połączenie połączonych cech towarów, których nie spełniają towary będące na rynku.

5.2.4. WYKRYWANIE NIETYPOWYCH ZACHOWAŃ KLIENTÓW

Zachowanie klienta można opisać wieloma parametrami. Jeśli każdy z parametrów potraktujemy jako wymiar przestrzeni wielowymiarowej, to zachowanie klienta będzie reprezentowane poprzez punkt. Nietypowe zachowanie klienta będzie zauważalne jako odosobniony punkt w przestrzeni. Można je rozpatrywać jako nietypowe zachowanie danego klienta na tle innych klientów lub nietypowe zachowanie danego klienta w porównaniu z jego wcześniejszym zachowaniem. Nietypowe zachowanie na tle innych świadczy o indywidualności klienta, co może być pozytywne (np. zysk banku dzięki dużym obrotom klienta), neutralne lub negatywne (np. chęć oszukania banku przez kredytobiorcę). Natomiast nietypowe zachowanie w porównaniu z wcześniejszymi przyzwyczajeniami może świadczyć o zmianie preferencji klienta (można wtedy skierować do klienta nową ofertę) lub o tym, że miejsce klienta zajął ktoś inny (np. w wyniku kradzieży karty kredytowej). Z powyższego

wynika, że niezależnie od przyczyny - korzystne jest zauważenie nietypowego zachowania klienta.

Jakościowa analiza wielowymiarowej przestrzeni może pomóc w wykryciu odosobnionych punktów reprezentujących nietypowe zachowania klientów.

5.3. WYSTĘPOWANIE ZŁÓŻ

Rozwój metod i aparatury pomiarowej oraz systemów interpretacyjnych służących wykrywaniu złóż surowców naturalnych, spowodował możliwość kompleksowego podejścia do rozwiązywania problemów złożowych. Skomplikowane warunki geologiczne w jakich występują złoża, zmuszają do jednoczesnego użycia wielu metod pomiarowych. Stosuje się pomiary z użyciem fal sejsmicznych, profilowania termicznego, fal akustycznych, itd. Wiele metod pomiarowych oznacza, że wyniki można rozpatrywać w wielu aspektach. Prowadzi to do możliwości interpretacji wyników badań jako punktów wielowymiarowej przestrzeni.

Występowanie punktu reprezentującego badany obszar geologiczny w obszarze występowania punktów reprezentujących znane złoża świadczy o ich pewnym podobieństwie. Analiza jakościowa mogłaby pozwolić stwierdzić, w obrębie której grupy punktów znajduje się punkt reprezentujący badane złożo, co znacząco ułatwia interpretację danych geofizycznych.

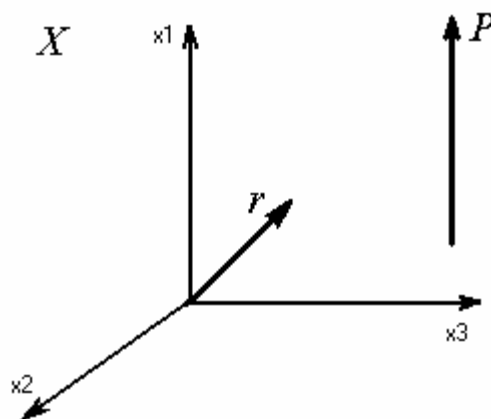
Na podstawie przedstawionych przykładów widać jak różnorodne mogą być zastosowania jakościowej analizy danych wielowymiarowych. Można ją wykorzystać wszędzie tam, gdzie mamy do czynienia z rzeczywistością, którą można rozpatrywać w wielu płaszczyznach, aspektach, wymiarach.

6. METODA WIZUALIZACJI WIELOWYMIAROWYCH DANYCH DYSKRETNYCH

6.1. WPROWADZENIE

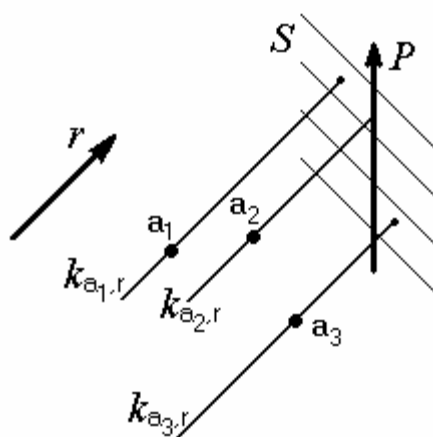
W rozdziale 3 pokazano w jaki sposób można wizualizować n -wymiarowe *bryły wypukłe*. Teraz zastanówmy się jak wygląda sytuacja z wizualizacją punktów w przestrzeni n -wymiarowej. Na podstawie twierdzenia 3.3 wiemy, że policzenie *położenia rzutu punktu obserwowanego a* , oraz *odległości rzutu punktu obserwowanego a* sprowadza się do rozwiązania układu n -równań z 3 niewiadomymi (gdzie n oznacza wymiar przestrzeni). Jak łatwo zauważyć, dla danego *punktu obserwowanego a* , przy ustalonym $n > 3$ powyższy układ równań może nie mieć rozwiązania. Oznacza to w praktyce, że dany *punkt obserwowany a* nie będzie widoczny na *płaszczyźnie obserwacyjnej P* .

Zobrazujmy powyższy wniosek na przykładzie. W tym celu weźmy *przestrzeń obserwowaną X* 3-wymiarową (przykład z przestrzenią więcej wymiarową trudniej byłoby zrozumieć). W tej sytuacji aby układ równań z twierdzenia 3.3 miał więcej równań niż niewiadomych przyjmijmy na chwilę, że *płaszczyzna obserwacyjna P* jest jednowymiarowa (tzn. że możemy obserwować rozważaną rzeczywistość nie poprzez wycinek płaszczyzny dwuwymiarowej lecz poprzez wycinek prostej). Dodatkowo weźmy wektor r będący *właściwym kierunkiem rzutowania na płaszczyznę obserwacyjną P* . Przykład przyjętej sytuacji przedstawia rysunek 6.1.



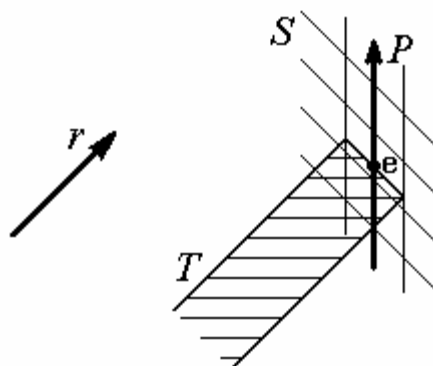
Rysunek 6.1. Przedstawiono sytuację, gdy *płaszczyzna obserwacyjna P* jest jednowymiarowa, *przestrzeń obserwowana X* 3-wymiarowa, r jest *właściwym kierunkiem rzutowania na P* .

Dla danego punktu obserwowanego a wyznaczmy $k_{a,r}$ (czyli prostą równoległą do r i przechodzącą przez a). Jak widać na rys. 6.2 prosta $k_{a,r}$ nie musi mieć punktów wspólnych z P (wynika to również z twierdzenia 3.2). Natomiast $k_{a,r}$ zawsze ma dokładnie jeden punkt wspólny z hiperpowierzchnią S (w przestrzeni 3-wymiarowej hiperpowierzchnia S jest płaszczyzną) zawierającą P i prostopadłą do r (fakt ten dla ogólnego przypadku zostanie udowodniony w twierdzeniu 6.2).



Rysunek 6.2. Prosta równoległa do r i przechodząca przez a nie musi mieć punktów wspólnych z P , natomiast ma zawsze dokładnie jeden punkt wspólny z hiperpowierzchnią S zawierającą P i prostopadłą do r . W powyższej sytuacji tylko punkt a_2 będzie widoczny przy pomocy płaszczyzny obserwacyjnej P .

W praktyce tylko przy szczególnych ustawieniach płaszczyzny obserwacyjnej P byłoby możliwe obserwowanie jakichkolwiek punktów. Oznacza to, że w większości sytuacji obserwacja danego zbioru punktów sprowadzałaby się do tego, że przy pomocy płaszczyzny obserwacyjnej P nic nie byłoby widać. Aby temu zapobiec przyjmijmy, że na płaszczyźnie obserwacyjnej P widoczne są nie tylko punkty leżące na prostych równoległych do r i przechodzących przez P ale również te punkty które leżą na prostych równoległych do r i przechodzących przez S (czyli hiperpowierzchnię zawierającą P i prostopadłą do r) w odległości mniejszej od pewnej ustalonej wartości od płaszczyzny obserwacyjnej P . Odległość ta dla danego punktu obserwowanego a będzie reprezentowana przez wektor b_a nazwany promieniem tunelu (formalna definicja promienia tunelu zostanie wprowadzona w dalszej części pracy). W przedstawionej sytuacji w danym punkcie e płaszczyzny obserwacyjnej P będą mogły być widoczne wszystkie punkty znajdujące się w tunelu o przekroju będącym odcinkiem i rozciągającym się wzdłuż r .



Rysunek 6.3. Przedstawiono *tunel T* punktu *e* (obszar zakreskowany poziomymi liniami). Wszystkie punkty należące do *tunelu T* będą widoczne w punkcie *e* płaszczyzny obserwacyjnej *P*.

Natomiast w ogólnej sytuacji w danym punkcie *e* płaszczyzny obserwacyjnej *P* będą widoczne wszystkie punkty znajdujące się w *tunelu* o przekroju będącym kulą $n-3$ wymiarową i rozciągającym się wzdłuż kierunku rzutowania *r*. Przedstawione powyżej w sposób intuicyjny fakty teraz sformalizujemy i udowodnimy.

6.2. MODEL MATEMATYCZNY

Na początku udowodnimy, że *hiperpowierzchnia* zakotwiczona w punkcie *w* i skierowana w kierunku *r* (*r*-właściwy kierunek rzutowania) zawiera *płaszczyznę obserwacyjną* $P = \delta(w, \{p_1, p_2\})$. Własność ta będzie nam potrzebna przy dowodzie twierdzenia 6.3.

Twierdzenie 6.1

Niech: $P = \delta(w, \{p_1, p_2\})$ - płaszczyzna obserwacyjna,

$r \in X$ - właściwy kierunek rzutowania na płaszczyznę obserwacyjną *P*,

$S_{(w,r)} \subset X$ - hiperpowierzchnia,

wtedy: $P \subset S_{(w,r)}$

Dowód:

Niech $x \in P$, czyli z definicji *P* mamy:

$$\exists \beta_1, \beta_2 \in F \text{ t.ż. } x = w + \beta_1 p_1 + \beta_2 p_2$$

z założenia, że *r* jest właściwym kierunkiem rzutowania na płaszczyznę obserwacyjną *P* wynika, że $\{p_1, p_2, r\}$ – jest układem ortogonalnym, zatem:

$$x = w + \beta_1 p_1 + \beta_2 p_2 \wedge (p_1, r) = 0 \wedge (p_2, r) = 0$$

więc:

$$x = w + \beta_1 p_1 + \beta_2 p_2 \wedge \beta_1(p_1, r) = 0 \wedge \beta_2(p_2, r) = 0$$

czyli:

$$x = w + \beta_1 p_1 + \beta_2 p_2 \wedge \beta_1(p_1, r) + \beta_2(p_2, r) = 0$$

zatem:

$$x - w = \beta_1 p_1 + \beta_2 p_2 \wedge (\beta_1 p_1 + \beta_2 p_2, r) = 0$$

podstawiając do iloczynu skalarnego wartość z pierwszego równania otrzymujemy:

$$(x - w, r) = 0$$

korzystając z definicji *hiperpowierzchni* otrzymujemy: $x \in S_{(w,r)}$ ■

Następne twierdzenie pokazuje, że *prosta równoległa* do r i przechodząca przez a ma zawsze dokładnie jeden punkt wspólny z *hiperpowierzchnią* $S_{(w,r)}$ zawierającą P i prostopadłą do r . Własność ta ma dla nas duże znaczenie ponieważ gdy nie będziemy mogli policzyć *odległości rzutu punktu obserwowanego a* (gdy $P \cap k_{a,r} = \emptyset$) to będziemy mogli policzyć odległość liczoną w kierunku r od punktu a do *hiperpowierzchni* $S_{(w,r)}$.

Twierdzenie 6.2

Niech: $r \in X$ - dowolny wektor niezerowy,

$$w \in X,$$

$$a \in X,$$

$k_{a,r}$ - *prosta równoległa* do r i przechodząca przez a ,

$S_{(w,r)} \subset X$ - *hiperpowierzchnia*

wtedy: $\exists e \in X$ dokładnie jedno takie że $e \in k_{a,r} \cap S_{(w,r)}$

Dowód:

1) Istnienie:

$$\text{niech: } \psi = \frac{(w - a, r)}{(r, r)} \text{ oraz } e = \psi r + a$$

przekształcając pierwsze równanie otrzymujemy:

$$\psi(r, r) = (w - a, r) \wedge \exists \psi \in F \text{ t.ż. } e = \psi r + a$$

czyli:

$$(\psi r, r) - (w - a, r) = 0 \wedge \exists \psi \in F \text{ t.ż. } e = \psi r + a$$

zatem:

$$(\psi r + a - w, r) = 0 \wedge \exists \psi \in F \text{ t.ż. } e = \psi r + a$$

podstawiając do iloczynu skalarnego wartość z drugiego równania otrzymujemy:

$$(e - w, r) = 0 \wedge \exists \psi \in F \text{ t.ż. } e = \psi r + a$$

korzystając z definicji *hiperpowierzchni* oraz *prostej równoległej do r* otrzymujemy:

$$e \in S_{(w,r)} \wedge e \in k_{a,r}, \text{ więc: } e \in k_{a,r} \cap S_{(w,r)} \quad \square$$

2) Jedyność:

hipoteza: $\exists e, c \in X$ takie że $e \neq c \wedge e \in k_{a,r} \cap S_{(w,r)} \wedge c \in k_{a,r} \cap S_{(w,r)}$

czyli:

$$e \in k_{a,r} \wedge e \in S_{(w,r)} \wedge c \in k_{a,r} \wedge c \in S_{(w,r)}$$

korzystając z definicji $k_{a,r}$ oraz z definicji $S_{(w,r)}$ otrzymujemy:

$$\exists \psi_1, \psi_2 \in F \text{ takie że } e = \psi_1 r + a \wedge c = \psi_2 r + a \wedge (e - w, r) = 0 \wedge (c - w, r) = 0$$

podstawiając policzone e oraz c do iloczynów skalarnych otrzymujemy:

$$e = \psi_1 r + a \wedge c = \psi_2 r + a \wedge (\psi_1 r + a - w, r) = 0 \wedge (\psi_2 r + a - w, r) = 0$$

więc:

$$e = \psi_1 r + a \wedge c = \psi_2 r + a \wedge (\psi_1 r, r) - (w - a, r) = 0 \wedge (\psi_2 r, r) - (w - a, r) = 0$$

zatem:

$$e = \psi_1 r + a \wedge c = \psi_2 r + a \wedge \psi_1(r, r) = (w - a, r) \wedge \psi_2(r, r) = (w - a, r)$$

z dwóch ostatnich równań liczymy ψ_1 oraz ψ_2 i otrzymujemy:

$$e = \psi_1 r + a \wedge c = \psi_2 r + a \wedge \psi_1 = \psi_2 = \frac{(w - a, r)}{(r, r)}$$

z tego wynika, że $e = c$ czyli hipoteza fałszywa ■

Poniższe twierdzenie pokazuje w jaki sposób bezpośrednio policzyć *odległość rzutu punktu obserwowanego a przy założeniu, że istnieje rzut punktu obserwowanego a zgodny z właściwym kierunkiem rzutowania r na płaszczyznę obserwacyjną P*.

Twierdzenie 6.3

Niech: $P = \delta(w, \{p_1, p_2\})$ - płaszczyzna obserwacyjna,

$$a \in X,$$

$r \in X$ - właściwy kierunek rzutowania na płaszczyznę obserwacyjną P ,

$k_{a,r}$ - prosta równoległa do r i przechodząca przez a ,

$$\exists e \in P \cap k_{a,r}$$

wtedy: *odległość rzutu punktu obserwowanego a wynosi:*

$$\psi = \frac{(w-a, r)}{(r, r)}$$

Dowód:

z założenia mamy: $\exists e \in P \cap k_{a,r}$ czyli: $e \in P \wedge e \in k_{a,r}$

na podstawie twierdzenia 6.1 wiemy, że $P \subset S_{(w,r)}$, zatem:

$$e \in S_{(w,r)} \wedge e \in k_{a,r}$$

korzystając z definicji $S_{(w,r)}$ oraz z definicji $k_{a,r}$ otrzymujemy:

$$(e - w, r) = 0 \wedge \exists \psi \in F \text{ t.ż. } e = \psi r + a$$

podstawiając policzone e do iloczynu skalarnego otrzymujemy:

$$(\psi r + a - w, r) = 0$$

więc:

$$\psi(r, r) - (w - a, r) = 0$$

czyli:

$$\psi(r, r) = (w - a, r)$$

$$\text{ostatecznie otrzymujemy: } \psi = \frac{(w-a, r)}{(r, r)} \blacksquare$$

Wniosek: Należy zauważyć, że gdy nie istnieje $e \in P \cap k_{a,r}$ (czyli rzut punktu obserwowanego a na płaszczyznę obserwacyjną P) to tak policzona ψ reprezentuje odległość od punktu a do punktu $e \in S_{(w,r)} \cap k_{a,r}$ (czyli odległość liczoną w kierunku r od punktu a do jego rzutu e na hiperpowierzchnię zawierającą P i prostopadłą do r). Natomiast na podstawie twierdzenia 6.2 wiemy, że $e \in S_{(w,r)} \cap k_{a,r}$ zawsze istnieje.

Poniższe twierdzenie pokazuje w jaki sposób bezpośrednio policzyć położenie rzutu punktu obserwowanego a przy założeniu, że istnieje rzut punktu obserwowanego a zgodny z właściwym kierunkiem rzutowania r na płaszczyznę obserwacyjną P .

Twierdzenie 6.4

Niech: $P = \delta(w, \{p_1, p_2\})$ - płaszczyzna obserwacyjna, $\{p_1, p_2\}$ - układ ortogonalny,

$$a \in X,$$

$r \in X$ - kierunek rzutowania na płaszczyznę obserwacyjną P ,

$k_{a,r}$ - prosta równoległa do r i przechodząca przez a ,

$$\exists e \in P \cap k_{a,r}$$

wtedy: *Położenie rzutu punktu obserwowanego a* czyli para $\{\beta_1, \beta_2\}$ jest określona wzorami :

$$\beta_1 = \frac{(\psi r + a - w, p_1)}{(p_1, p_1)}$$

$$\beta_2 = \frac{(\psi r + a - w, p_2)}{(p_2, p_2)}$$

Dowód:

1) Liczymy β_1

z założenia mamy: $\exists e \in P \cap k_{a,r}$, czyli: $e \in P \wedge e \in k_{a,r}$ oraz wiadomo, że: $(e, p_1) = (e, p_1)$

korzystając z definicji P oraz z definicji $k_{a,r}$ otrzymujemy:

$$\exists \beta_1, \beta_2 \in F \text{ t.ż. } e = w + \beta_1 p_1 + \beta_2 p_2 \wedge \exists \psi \in F \text{ t.ż. } e = \psi r + a \wedge (e, p_1) = (e, p_1)$$

otrzymane wartości e podstawiamy do iloczynu skalarnego, otrzymując:

$$(w + \beta_1 p_1 + \beta_2 p_2, p_1) = (\psi r + a, p_1)$$

czyli:

$$(w, p_1) + (\beta_1 p_1, p_1) + (\beta_2 p_2, p_1) = (\psi r + a, p_1)$$

zatem:

$$\beta_1 (p_1, p_1) + \beta_2 (p_2, p_1) = (\psi r + a, p_1) - (w, p_1)$$

z założenia $(p_2, p_1) = 0$, więc:

$$\beta_1 (p_1, p_1) = (\psi r + a - w, p_1)$$

$$\text{czyli: } \beta_1 = \frac{(\psi r + a - w, p_1)}{(p_1, p_1)} \quad \square$$

2) Liczymy β_2

z założenia mamy: $\exists e \in P \cap k_{a,r}$, czyli: $e \in P \wedge e \in k_{a,r}$ oraz wiadomo, że: $(e, p_2) = (e, p_2)$

korzystając z definicji P oraz z definicji $k_{a,r}$ otrzymujemy:

$$\exists \beta_1, \beta_2 \in F \text{ t.ż. } e = w + \beta_1 p_1 + \beta_2 p_2 \wedge \exists \psi \in F \text{ t.ż. } e = \psi r + a \wedge (e, p_2) = (e, p_2)$$

otrzymane wartości e podstawiamy do iloczynu skalarnego, otrzymując:

$$(w + \beta_1 p_1 + \beta_2 p_2, p_2) = (\psi r + a, p_2)$$

więc:

$$\beta_1 (p_1, p_2) + \beta_2 (p_2, p_2) = (\psi r + a, p_2) - (w, p_2)$$

z założenia $(p_1, p_2) = 0$, więc:

$$\beta_2 (p_2, p_2) = (\psi r + a - w, p_2)$$

$$\text{czyli: } \beta_2 = \frac{(\psi r + a - w, p_2)}{(p_2, p_2)} \quad \blacksquare$$

Def.6.1 *Promieniem tunelu punktu $a \in X$ względem płaszczyzny obserwacyjnej*

$P = \delta(w, \{p_1, p_2\})$ będziemy nazywać wektor $b_a = \psi r + a - w - \beta_1 p_1 - \beta_2 p_2$, gdzie:

$$\psi = \frac{(w - a, r)}{(r, r)}, \quad \beta_1 = \frac{(\psi r + a - w, p_1)}{(p_1, p_1)}, \quad \beta_2 = \frac{(\psi r + a - w, p_2)}{(p_2, p_2)},$$

$r \in X$ - właściwy kierunek rzutowania na płaszczyznę obserwacyjną P

Def.6.2 *Tunelem punktu $e \in P$ względem płaszczyzny obserwacyjnej $P = \delta(w, \{p_1, p_2\})$ będziemy nazywać zbiór $T_{e, \mu} \subset X$:*

$$T_{e, \mu} \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in X : (b_x, b_x) \leq \mu \wedge e = w + \beta_1 p_1 + \beta_2 p_2\}, \text{ gdzie:}$$

b_x - promień tunelu punktu x względem płaszczyzny obserwacyjnej $P = \delta(w, \{p_1, p_2\})$,

$$\beta_1 = \frac{(\psi r + x - w, p_1)}{(p_1, p_1)}, \quad \beta_2 = \frac{(\psi r + x - w, p_2)}{(p_2, p_2)}, \quad \psi = \frac{(w - x, r)}{(r, r)}$$

$r \in X$ - właściwy kierunek rzutowania na płaszczyznę obserwacyjną P

Następne twierdzenie pokazuje że rzut punktu obserwowanego a zgodny z właściwym kierunkiem rzutowania r na płaszczyznę obserwacyjną P istnieje wtedy i tylko wtedy gdy promień tunelu punktu a jest wektorem zerowym.

Twierdzenie 6.5

Niech: $P = \delta(w, \{p_1, p_2\})$ - płaszczyzna obserwacyjna,

$r \in X$ - właściwy kierunek rzutowania na płaszczyznę obserwacyjną P ,

$a \in X$,

$k_{a, r}$ - prosta równoległa do r i przechodząca przez a

$b_a = \psi r + a - w - \beta_1 p_1 - \beta_2 p_2$, $b_a \in X$ - promień tunelu punktu a względem płaszczyzny obserwacyjnej P

wtedy:

$$P \cap k_{a, r} \neq \emptyset \text{ wtw } b_a = 0$$

Dowód:

1) $\Rightarrow$

$P \cap k_{a, r} \neq \emptyset$ więc: $\exists e \in P \cap k_{a, r}$ czyli: $e \in P \wedge e \in k_{a, r}$

korzystając z definicji P oraz z definicji $k_{a, r}$ otrzymujemy:

$$\exists \xi_1, \xi_2 \in F \text{ t.ż. } e = w + \xi_1 p_1 + \xi_2 p_2 \wedge \exists \varphi \in F \text{ t.ż. } e = \varphi r + a$$

przyrównajmy otrzymane wzory na e , wtedy:

$$\varphi r + a = w + \xi_1 p_1 + \xi_2 p_2$$

czyli:

$$w - a = \varphi r - \xi_1 p_1 - \xi_2 p_2$$

korzystając z definicji *promienia tunelu*, wiemy, że: $b_a = \psi r + a - w - \beta_1 p_1 - \beta_2 p_2$, gdzie:

$$\psi = \frac{(w - a, r)}{(r, r)}, \beta_1 = \frac{(\psi r + a - w, p_1)}{(p_1, p_1)}, \beta_2 = \frac{(\psi r + a - w, p_2)}{(p_2, p_2)}, \text{ więc mamy:}$$

$$w - a = \varphi r - \xi_1 p_1 - \xi_2 p_2 \wedge$$

$$\psi = \frac{(w - a, r)}{(r, r)} = \frac{(\varphi r - \xi_1 p_1 - \xi_2 p_2, r)}{(r, r)} = \frac{\varphi(r, r) - \xi_1(p_1, r) - \xi_2(p_2, r)}{(r, r)} = \varphi$$

zatem:

$$w - a = \varphi r - \xi_1 p_1 - \xi_2 p_2 \wedge \psi = \varphi$$

więc:

$$\psi r + a - w = \xi_1 p_1 + \xi_2 p_2 \wedge \psi = \varphi \wedge$$

$$\beta_1 = \frac{(\psi r + a - w, p_1)}{(p_1, p_1)} = \frac{(\xi_1 p_1 + \xi_2 p_2, p_1)}{(p_1, p_1)} = \frac{\xi_1(p_1, p_1) + \xi_2(p_2, p_1)}{(p_1, p_1)} = \xi_1 \wedge$$

$$\beta_2 = \frac{(\psi r + a - w, p_2)}{(p_2, p_2)} = \frac{(\xi_1 p_1 + \xi_2 p_2, p_2)}{(p_2, p_2)} = \frac{\xi_1(p_1, p_2) + \xi_2(p_2, p_2)}{(p_2, p_2)} = \xi_2$$

czyli:

$$\psi r + a - w = \beta_1 p_1 + \beta_2 p_2$$

więc:

$$b_a = \psi r + a - w - \beta_1 p_1 - \beta_2 p_2 = 0 \quad \square$$

2) $\Leftarrow$

$$b_a = 0 \text{ więc: } \psi r + a - w - \beta_1 p_1 - \beta_2 p_2 = 0$$

czyli:

$$\psi r + a = w + \beta_1 p_1 + \beta_2 p_2$$

przyjmijmy oznaczenie: $e = w + \beta_1 p_1 + \beta_2 p_2$, $e \in X$, wtedy:

$$\exists \beta_1, \beta_2, \psi \in F \text{ t.ż. } e = w + \beta_1 p_1 + \beta_2 p_2 \wedge e = \psi r + a$$

korzystając z definicji P oraz z definicji $k_{a,r}$ otrzymujemy:

$$e \in P \wedge e \in k_{a,r} \text{ czyli: } \exists e \in P \cap k_{a,r} \text{ z tego wynika, że: } P \cap k_{a,r} \neq \emptyset \quad \blacksquare$$

Wniosek: Dzięki powyższemu twierdzeniu zamiast dla danego punktu a rozwiązywać układ równań z twierdzenia 3.3, wystarczy na podstawie twierdzenia 6.3 bezpośrednio policzyć

odległość rzutu punktu obserwowanego a , następnie na podstawie twierdzenia 6.4 bezpośrednio policzyć położenie rzutu punktu obserwowanego a po czym należy policzyć promień tunelu b_a punktu a i jeśli jest on wektorem zerowym to otrzymane wartości są rozwiązaniem układu równań z twierdzenia 3.3. Jeśli natomiast otrzymany promień tunelu nie jest wektorem zerowym oznacza to, że punkt obserwowany a leży wewnątrz tunelu $T_{e,\mu} \subset X$, gdzie $e = w + \xi_1 p_1 + \xi_2 p_2$ oraz $(b_a, b_a) \leq \mu$

6.3. PRZYKŁADY ZBIORÓW DANYCH DYSKRETNYCH

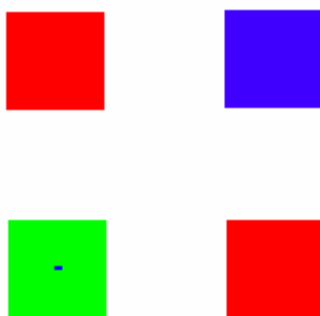
Stosując wyżej opisany model matematyczny przedstawiono na ekranie komputera kilka przykładów wielowymiarowych zbiorów danych dyskretnych.

6.3.1 KOSTKI 7-WYMIAROWE Z ZAKŁÓCENIEM

Pierwszy przykład stanowią trzy zbiory punktów umieszczone w przestrzeni 7-wymiarowej. Każdy z dwóch zbiorów kształtem przypomina kostkę 7-wymiarową a trzeci zbiór kształtem przypomina dwie kostki 7-wymiarowe. Wszystkie punkty $x = (x_1, x_2, \dots, x_7)$ należące do każdej z tych czterech kostek spełniają warunek:

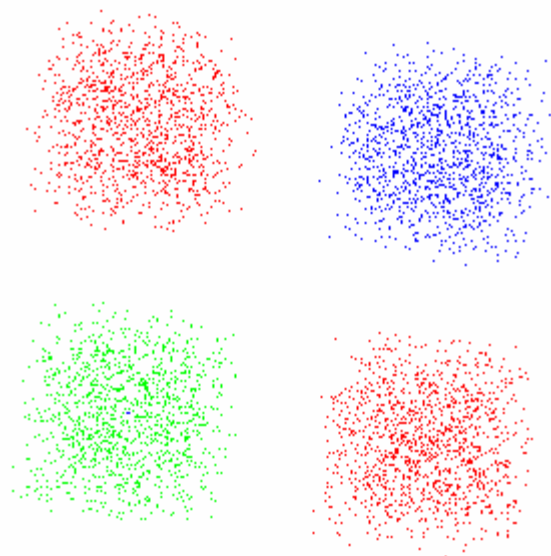
$$\forall i = 1, 2, \dots, 7 \text{ zachodzi: } y_i - \frac{A}{2} \leq x_i \leq y_i + \frac{A}{2},$$

gdzie $y = (y_1, y_2, \dots, y_7)$ – środek danej kostki, $y \in X$, A – bok kostki, $A \in F$.



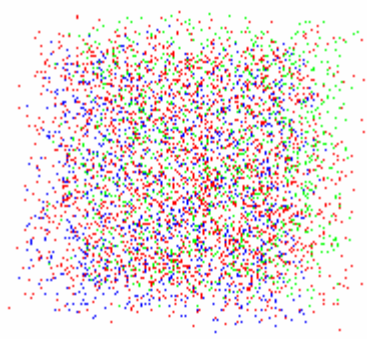
Rysunek 6.4. Przedstawiono schematycznie w dwóch wymiarach opisywane w przykładzie trzy zbiory punktów. W zbiorze zielonym dodatkowo umieszczono zakłócenie – dwa punkty z innego zbioru. Zbiór czerwony składa się z dwóch kostek.

Dodatkowo w środku jednego ze zbiorów umieszczono blisko siebie dwa punkty należące do innego zbioru stanowiące zakłócenie. Schematycznie przedstawiony dwuwymiarowy odpowiednik opisywanej sytuacji przedstawia rysunek 6.4.



Rysunek 6.5. Otrzymany wygląd omawianych zbiorów. Wyraźnie widoczne trzy istotne cechy jakościowe: (a) zbiory nie zachodzą na siebie, (b) w zbiorze złożonym z zielonych punktów znajduje się zakłócenie (w postaci dwóch sklejonych niebieskich punktów), (c) Zbiór złożony z punktów czerwonych nie jest spójny.

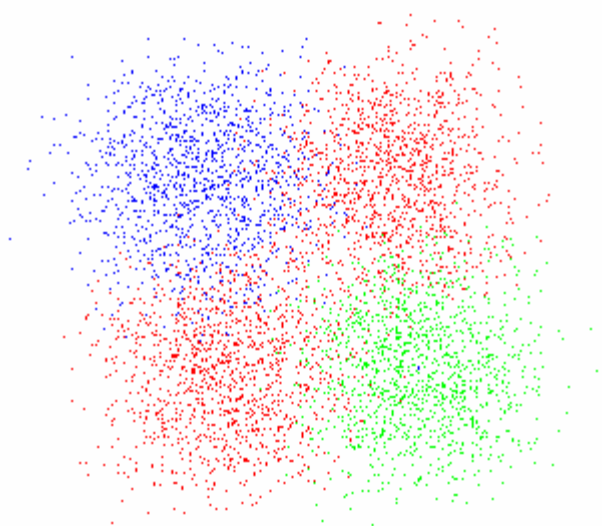
Na rysunku 6.5 przedstawiono otrzymany wygląd omawianych zbiorów. Maksymalny promień tunelu dobrano tak by wszystkie punkty były widoczne. Należy zauważyć, że wyraźnie widać iż zbiory te nie zachodzą na siebie. Oznacza to, że skutecznie można je od siebie oddzielić. Widać również, że zbiór nr 0 (punkty koloru czerwonego) nie jest spójny.



Rysunek 6.6. Z tego punktu widzenia powstaje wrażenie, że wszystkie omawiane zbiory pokrywają się

Zauważalne są również punkty będące zakłóceniem (dwa złączone niebieskie punkty znajdujące się w środku zbioru zielonych punktów).

Rysunki 6.6 i 6.7 również przedstawiają otrzymany wygląd omawianych zbiorów. Widać że od wyboru ustawień płaszczyzny obserwacyjnej oraz od ustawienia *kierunku rzutowania* r zależy to, które cechy obserwowanych zbiorów są widoczne.



Rysunek 6.7. Przy takich ustawieniach parametrów określających kierunek patrzenia powstaje wrażenie częściowego zachodzenia na siebie zbiorów.

6.3.2 KULA 7-WYMIAROWA W “SFERZE” 7-WYMIAROWEJ KTÓRA SIĘ ZNAJDUJE W DRUGIEJ “SFERZE” 7-WYMIAROWEJ

Trzy zbiory punktów $x \in X$, gdzie n -wymiar przestrzeni równy 7, $x = (x_1, x_2, \dots, x_7)$, oraz $R_1, R_2, R_3, R_4, R_5 \in F$ – liczby rzeczywiste takie, że: $0 < R_1 < R_2 < R_3 < R_4 < R_5$

1) Wszystkie punkty należące do zbioru nr 0 spełniają warunek:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i^2)} \leq R_1$$

2) Wszystkie punkty należące do zbioru nr 1 spełniają warunek:

$$R_2 \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i^2)} \leq R_3$$

3) Wszystkie punkty należące do zbioru nr 2 spełniają warunek:

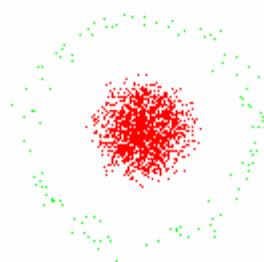
$$R_4 \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i^2)} \leq R_5$$

Schematycznie przedstawiony dwuwymiarowy odpowiednik opisywanej sytuacji przedstawia rysunek 6.8. Z powyższego opisu wynika, że omawiany przykład dotyczy sytuacji w której zbiór punktów w kształcie kuli 7-wymiarowej (zbiór nr 0) jest otoczony zbiorem punktów nr 1 mającym kształt “sfery o pewnej grubości”. Dodatkowo zbiory nr 0 i nr 1 są otoczone zbiorem punktów nr 2 mającym kształt większej “sfery o pewnej grubości”.



Rysunek 6.8. Przedstawiono schematycznie w dwóch wymiarach opisywane w przykładzie zbiory. Kolor czerwony oznacza miejsce w którym mogą się znajdować punkty zbioru nr 0, kolor zielony - zbioru nr 1, kolor niebieski - zbioru nr 2.

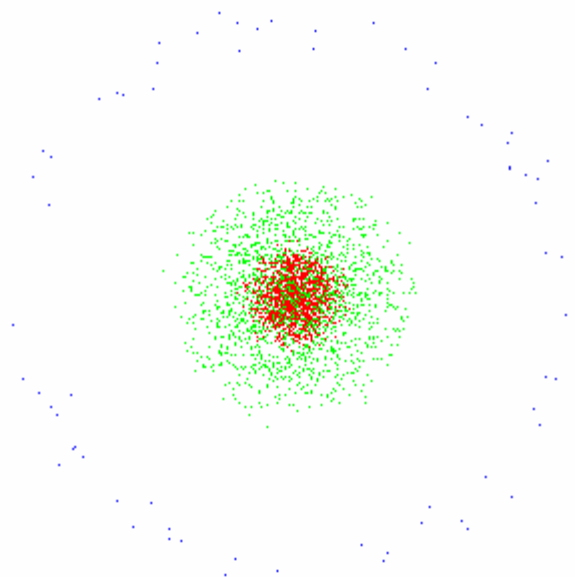
Na rysunkach 6.9-6.11 przedstawiono otrzymany wygląd omawianych zbiorów. Na rysunku 6.9 tak dobrano parametry obserwacji (ustawienie *plaszczyny obserwacyjnej*, maksymalny *promień tunelu*, zasięg patrzenia oraz *kierunek rzutowania*) by wszystkie punkty zbioru nr 0 były widoczne i jednocześnie punkty zbioru nr 0 nie zachodziły na punkty innych zbiorów. Z faktu iż udało się to osiągnąć wynika że zbiór nr 0 można oddzielić od pozostałych zbiorów.



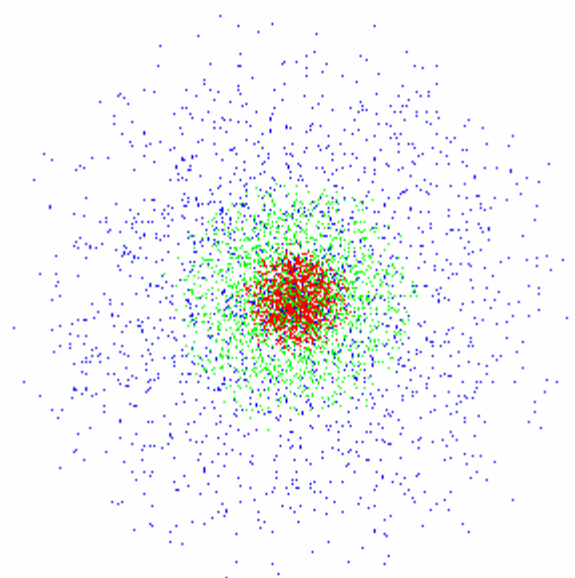
Rysunek 6.9. Wszystkie punkty zbioru nr 0 (punkty czerwone) są widoczne i jednocześnie nie zachodzą na punkty innych zbiorów. Wynika z tego istotna cecha jakościowa: zbiór nr 0 można oddzielić od pozostałych zbiorów.

Przy innym doborze parametrów obserwacji osiągnięto sytuację w której wszystkie punkty zbioru nr 1 są widoczne i jednocześnie punkty zbioru nr 1 nie zachodzą na punkty zbioru nr 2

(rysunek 6.10). Wynika z tego że zbiór nr 1 można oddzielić od zbioru nr 2. Z faktu, że zbiór nr 0 można oddzielić od pozostałych zbiorów oraz z faktu że zbiór nr 1 można oddzielić od zbioru nr 2 wynika, że każdy ze zbiorów można oddzielić od pozostałych, czyli że zbiory nie zachodzą na siebie. Stanowi to zaobserwowaną w wyniku wizualizacji jakościową cechę obserwowanych zbiorów.



Rysunek 6.10. Wszystkie punkty zbioru nr 1 (punkty zielone) są widoczne i jednocześnie nie zachodzą na punkty zbioru nr 2. Wynika z tego że zbiór nr 1 można oddzielić od zbioru nr 2.



Rysunek 6.11. Widoczne wszystkie punkty zbioru nr 0 (punkty czerwone), zbioru nr 1 (punkty zielone) i zbioru nr 2 (punkty niebieskie).

Na rysunku 6.11 przedstawiono sytuacje przy takich ustawieniach parametrów obserwacji by wszystkie punkty obserwowanych zbiorów były widoczne.

6.3.3 WALEC 7-WYMIAROWY I DWIE “PÓŁSFERY” 7-WYMIAROWE Z CYLINDRAMI 7-WYMIAROWYMI

Trzy zbiory punktów $x \in X$, gdzie n -wymiar przestrzeni równy 7, $x = (x_1, x_2, \dots, x_7)$, oraz $A, B, R_1, R_2, R_3 \in F$ - liczby rzeczywiste takie, że: $0 < A < B$ oraz $0 < R_1 < R_2 < R_3$

1) Wszystkie punkty należące do zbioru nr 0 spełniają warunek:

$$\sqrt{\sum_{i=2}^n (x_i^2)} \leq R_1 \wedge x_1 \in [-B, B]$$

2) Wszystkie punkty należące do zbioru nr 1 spełniają warunek:

$$R_2 \leq \sqrt{\sum_{i=2}^n (x_i^2) + (x_1 + B)^2} \leq R_3, \quad \text{dla } x_1 < -B$$

$$R_2 \leq \sqrt{\sum_{i=2}^n (x_i^2)} \leq R_3, \quad \text{dla } x_1 \in [-B, -A]$$

3) Wszystkie punkty należące do zbioru nr 2 spełniają warunek:

$$R_2 \leq \sqrt{\sum_{i=2}^n (x_i^2)} \leq R_3, \quad \text{dla } x_1 \in [A, B]$$

$$R_2 \leq \sqrt{\sum_{i=2}^n (x_i^2) + (x_1 - B)^2} \leq R_3, \quad \text{dla } x_1 > B$$

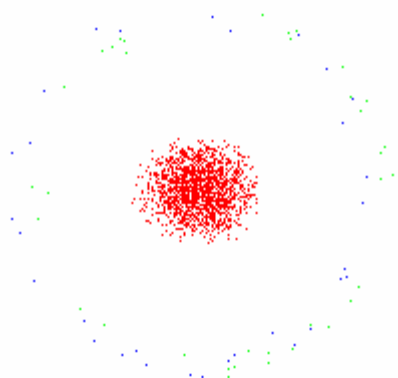
Na rysunku 6.12 przedstawiono dwuwymiarowy odpowiednik opisywanej sytuacji.



Rysunek 6.12. Przedstawiono schematycznie w dwóch wymiarach opisywane w przykładzie zbiory. Kolor czerwony oznacza miejsce w którym mogą się znajdować punkty zbioru nr 0, kolor zielony - zbioru nr 1, kolor niebieski - zbioru nr 2.

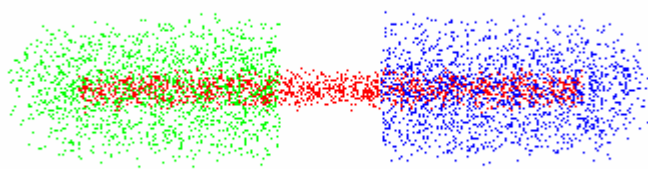
Omawiany przykład dotyczy sytuacji w której zbiór punktów nr 0 ma kształt n -wymiarowego walca. Zbiór punktów nr 1 ma kształt n -wymiarowej “sfery o pewnej grubości” połączonej z n -wymiarowym cylindrem. Zbiór punktów nr 2 wygląda tak samo jak zbiór nr 0 różni się tylko położeniem.

Otrzymany wygląd omawianych zbiorów przedstawiono na rysunkach 6.13-6.16. Na rysunku 6.13 tak dobrano parametry obserwacji, by wszystkie punkty zbioru nr 0 były widoczne i jednocześnie punkty zbioru nr 0 nie zachodziły na punkty innych zbiorów. Z faktu iż udało się to osiągnąć wynika, że zbiór nr 0 można oddzielić od pozostałych zbiorów.



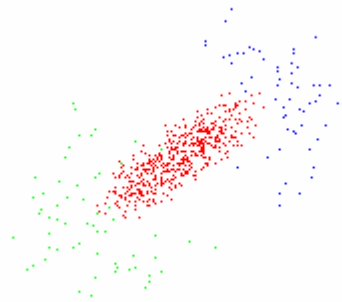
Rysunek 6.13. Wszystkie punkty zbioru nr 0 (punkty czerwone) są widoczne i jednocześnie nie zachodzą na punkty innych zbiorów. Wynika z tego że zbiór nr 0 można oddzielić od pozostałych zbiorów.

Inny dobór parametrów obserwacji pozwolił osiągnąć sytuację, w której wszystkie punkty wszystkich zbiorów są widoczne oraz punkty zbioru nr 1 nie zachodzą na punkty zbioru nr 2 (rysunek 6.14).



Rysunek 6.14. Wszystkie punkty zbioru nr 1 (punkty zielone) są widoczne i jednocześnie nie zachodzą na punkty zbioru nr 2 (punkty niebieskie). Wynika z tego że zbiór nr 1 można oddzielić od zbioru nr 2.

Wynika z tego że zbiór nr 1 można oddzielić od zbioru nr 2. Z faktu, że zbiór nr 0 można oddzielić od pozostałych zbiorów oraz z faktu że zbiór nr 1 można oddzielić od zbioru nr 2 wynika, że każdy ze zbiorów można oddzielić od pozostałych, czyli że zbiory nie zachodzą na siebie. Stanowi to zaobserwowaną w wyniku wizualizacji jakościową cechę obserwowanych zbiorów. Na rysunku 6.15 przedstawiono sytuację przy innych ustawieniach parametrów obserwacji, gdzie nie wszystkie punkty obserwowanych zbiorów są widoczne.



Rysunek 6.15. Z tego punktu widzenia powstaje wrażenie, że zbiór nr 1 (punkty zielone) oraz zbiór nr 2 (punkty niebieskie) mają kształt trójkąta.

6.3.4 TRZY OBEJMUJĄCE SIĘ TORUSY 5-WYMIAROWE

Trzy zbiory punktów $x \in X$, gdzie n -wymiar przestrzeni równy 5, $x = (x_1, x_2, \dots, x_5)$, oraz $A, R_1, R_2 \in F$ - liczby rzeczywiste takie, że: $0 < R_1 < R_2$ oraz $A \in [R_1 + R_2, 2R_2 - 2R_1]$

1) Wszystkie punkty należące do zbioru nr 0 spełniają warunek:

$$\sqrt{\sum_{i=3}^n (x_i^2) + \left(\sqrt{(x_1 + A)^2 + x_2^2} - R_2 \right)^2} \leq R_1$$

2) Wszystkie punkty należące do zbioru nr 1 spełniają warunek:

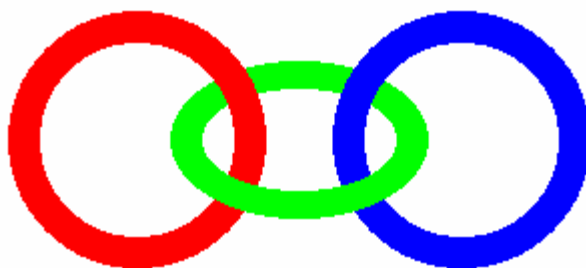
$$\sqrt{\sum_{i=4}^n (x_i^2) + x_2^2 + \left(\sqrt{x_1^2 + x_3^2} - R_2 \right)^2} \leq R_1$$

3) Wszystkie punkty należące do zbioru nr 2 spełniają warunek:

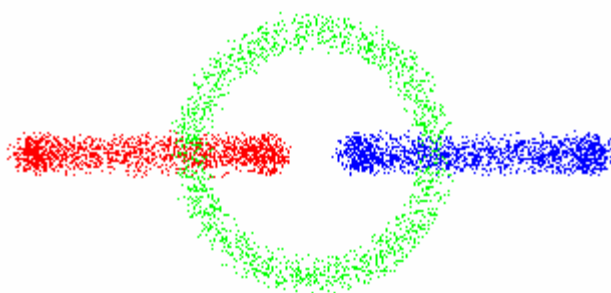
$$\sqrt{\sum_{i=3}^n (x_i^2) + \left(\sqrt{(x_1 - A)^2 + x_2^2} - R_2 \right)^2} \leq R_1$$

Rysunek 6.16 przedstawia trójwymiarowy odpowiednik opisywanej sytuacji. Omawiany przykład dotyczy sytuacji w której każdy z trzech zbiorów punktów ma kształt

5-wymiarowego torusa którego przekrojem jest 4-wymiarowa kula. Zbiory obejmują się wzajemnie podobnie jak ogniwa łańcucha. Rysunki 6.17-6.24 przedstawiają otrzymany wygląd omawianych zbiorów. Na rysunku 6.17 tak dobrano parametry obserwacji by wszystkie punkty wszystkich zbiorów były widoczne. Widać, że z tego punktu widzenia niektóre fragmenty zbiorów zachodzą na siebie. Nie możemy jednak bezpośrednio stwierdzić czy niektóre fragmenty zbiorów zachodzą na siebie czy tylko się przesłaniają.



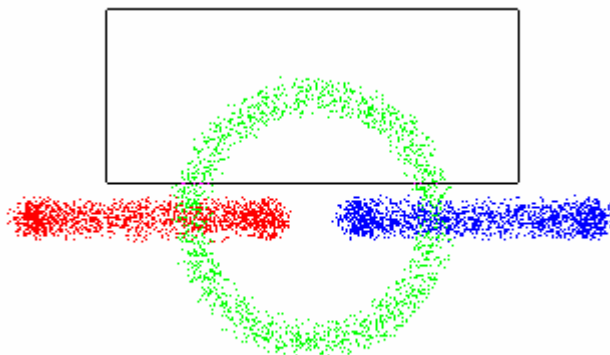
Rysunek 6.16. Przedstawiono schematycznie trójwymiarowy przypadek opisywanych w przykładzie zbiorów.



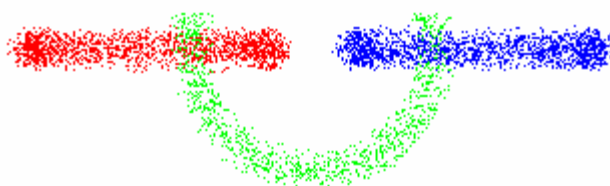
Rysunek 6.17. Wszystkie punkty wszystkich zbiorów są widoczne. Na podstawie powyższego rysunku nie możemy stwierdzić czy niektóre fragmenty zbiorów zachodzą na siebie czy tylko się przesłaniają.

Usuńmy fragment zbioru nr 1 do którego należą te punkty (punkty koloru zielonego z rysunku 6.18 objęte ramką) które nie zachodzą na punkty innych zbiorów. Jeśli możemy to zrobić oznacza to że fragment zbioru do którego należą można oddzielić od pozostałych zbiorów. Sytuację powstałą po usunięciu powyższych punktów przedstawia rysunek 6.19. Jeśli

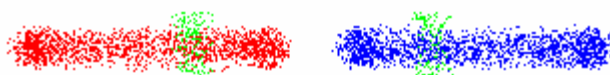
podobnie postąpimy z drugim fragmentem zbioru nr 1 leżącym niżej, otrzymamy sytuację przedstawioną na rysunku 6.20.



Rysunek 6.18. Zaznaczono ramką fragment zbioru nr 1 do którego należą te punkty, które nie zachodzą na punkty innych zbiorów. Oznacza to że fragment zbioru do którego należą można oddzielić od pozostałych zbiorów.

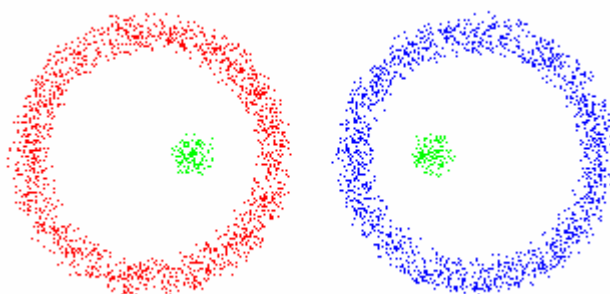


Rysunek 6.19. Sytuacja powstała po usunięciu zaznaczonego na rysunku 6.18 fragmentu zbioru.



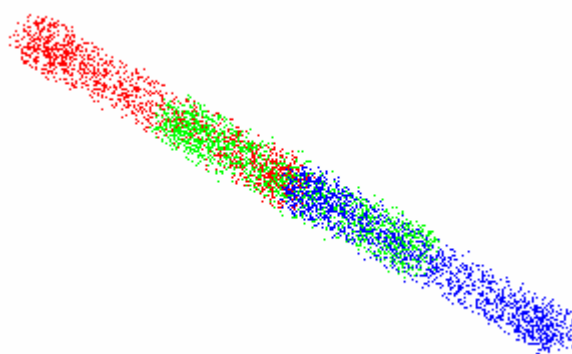
Rysunek 6.20. Usunięto drugi fragment zbioru nr 1 do którego należą te punkty które nie zachodzą na punkty innych zbiorów.

Następnie zmieniając dobór parametrów obserwacji możemy osiągnąć sytuację w której wszystkie nieusunięte punkty wszystkich zbiorów są widoczne oraz zbiory te nie zachodzą na siebie (rysunek 6.21). Wynika z tego że każdy z tych zbiorów (powstałych po wcześniej opisanym usunięciu fragmentów zbioru nr 1) można oddzielić od pozostałych, czyli że zbiory te nie zachodzą na siebie. Powyższy fakt w połączeniu z faktem iż usunięte fragmenty zbioru nr 1 również można oddzielić od pozostałych zbiorów oznacza że cały zbiór nr 0, cały zbiór nr 1 oraz cały zbiór nr 2 można oddzielić od pozostałych, czyli że te całe zbiory nie zachodzą na siebie. Stanowi to wywnioskowaną na podstawie wizualizacji jakościową cechę obserwowanych zbiorów.



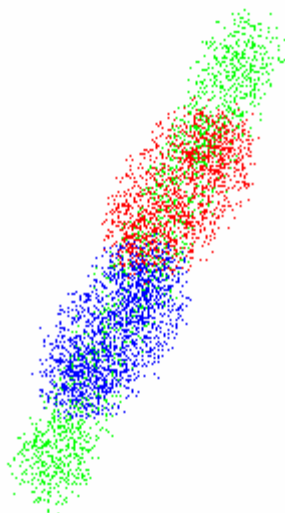
Rysunek 6.21. Parametry obserwacji dobrano w ten sposób by wszystkie nieusunięte punkty wszystkich zbiorów były widoczne oraz zbiory te nie zachodziły na siebie.

Przedstawione wcześniej rysunki przedstawiają obrazy zgodne z naszą intuicją związaną z opisywanymi zbiorami. Inaczej jest z następnymi rysunkami.



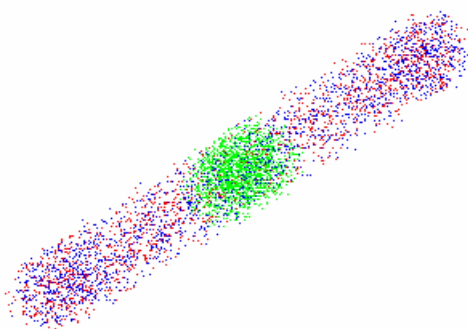
Rysunek 6.22. Z tego punktu widzenia powstaje wrażenie, że omawiane zbiory leżą w tej samej płaszczyźnie.

Patrząc na rysunek 6.22 może powstać mylne wrażenie, że omawiane zbiory leżą w tej samej płaszczyźnie co nie jest zgodne z prawdą.



Rysunek 6.23. Powstaje wrażenie, że zbiór nr 0 (punkty koloru czerwonego) i zbiór nr 2 (punkty koloru niebieskiego) mają mniejszy rozmiar niż zbiór nr 1 (punkty koloru zielonego).

Na podstawie rysunku nr 6.23 trudno byłoby wywnioskować że opisywane zbiory różnią się tylko położeniem.



Rysunek 6.24. Przy takich ustawieniach parametrów obserwacji wydaje się że zbiór nr 1 tworzy kształt kuli.

7. IMPLEMENTACJA SYSTEMU DO WIZUALIZACJI WIELOWYMIAROWYCH DANYCH DYSKRETNYCH

7.1. PROJEKT SYSTEMU

Budowę systemu oparto na programowaniu o charakterze zdarzeniowym, polegającym na tym że program konstruuje się jako zestaw funkcji obsługi, wywoływanych przez system operacyjny w momencie wystąpienia jakiegoś interesującego nas zdarzenia (np. wciśnięcie przycisku myszy, wybranie opcji z menu, użycie klawiatury, poruszenie myszą, itp.). System służący do wizualizacji danych dyskretnych (*punktów obserwowanych*) realizuje następujące zadania:

- 1) przechowywanie w pamięci komputera opisu n -wymiarowych zbiorów punktów w odpowiedniej formie z wykorzystaniem specjalnie dobranych struktur danych.
- 2) ustalanie punktu widzenia obserwowanych zbiorów punktów poprzez przemieszczanie wirtualnego obserwatora w przestrzeni n -wymiarowej.
- 3) rysowanie zbiorów punktów widzianych z danego miejsca przestrzeni.
- 4) możliwość usunięcia punktów znajdujących się w zaznaczonym przez obsługującego obszarze.

7.1.1. STRUKTURY DANYCH

Na podstawie definicji 3.1 przyjęto, że *przestrzeń obserwowana* X jest przestrzenią wektorową nad ciałem F , n -wymiarową, $n \geq 3$, z iloczynem skalarnym. Ustalono wektory $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ będące ortonormalną bazą przestrzeni X . Ponadto ustalono, że ciało F będzie ciałem liczb rzeczywistych i iloczyn skalarny będzie dany wzorem:

$$(p, q) = \sum_{i=1}^n p_i q_i \quad \text{gdzie } p, q \in X, \quad p = \sum_{i=1}^n p_i x_i, \quad q = \sum_{i=1}^n q_i x_i$$

W celu opisanego punktu obserwowanego przyjęto następujące struktury danych:

```
struct TYP_WEKTOR
{
    double X[MAX_WYMIAR];
};
struct TYP_PUNKT
{
    int NR_KLAS;
    struct TYP_WEKTOR WSP;
};
```

7.1.2. ZMIANA PUNKTU WIDZENIA W PRZESTRZENI n -WYMIAROWEJ

Zgodnie z definicją 3.4 *plaszczynę obserwacyjną* $P=\delta(w,\{p_1,p_2\})$ w sposób jednoznaczny określają trzy wektory: w,p_1,p_2 . Dodatkowym parametrem określającym punkt widzenia jest wektor r będący *właściwym kierunkiem rzutowania*. Zmianę punktu widzenia dokonuje się poprzez zmianę wektorów: w,p_1,p_2,r . Sposób i rodzaje tej regulacji są dokładnie takie same jak już wcześniej opisane w punkcie 4.1.2.

7.1.3. RYSOWANIE PUNKTÓW

W celu narysowania danego *punktu obserwowanego* a , musimy policzyć jego położenie na *plaszczynie obserwacyjnej* P oraz promień tunelu b_a . W celu policzenia położenia wystarczy na podstawie twierdzenia 6.3 bezpośrednio policzyć *odległość rzutu punktu obserwowanego* a , następnie na podstawie twierdzenia 6.4 bezpośrednio policzyć *położenie rzutu* (czyli parę $\beta_1,\beta_2 \in F$) *punktu obserwowanego* a , czyli:

$$\psi = \frac{(w-a, r)}{(r, r)}, \quad \beta_1 = \frac{(\psi r + a - w, p_1)}{(p_1, p_1)}, \quad \beta_2 = \frac{(\psi r + a - w, p_2)}{(p_2, p_2)},$$

gdzie: r - *właściwy kierunek rzutowania* na *plaszczynę obserwacyjną* $P=\delta(w,\{p_1,p_2\})$.

Natomiast *promień tunelu* b_a *punktu* a liczymy zgodnie z definicją 6.1, czyli:

$b_a = \psi r + a - w - \beta_1 p_1 - \beta_2 p_2$, gdzie:

$$\psi = \frac{(w-a, r)}{(r, r)}, \quad \beta_1 = \frac{(\psi r + a - w, p_1)}{(p_1, p_1)}, \quad \beta_2 = \frac{(\psi r + a - w, p_2)}{(p_2, p_2)},$$

$r \in X$ - *właściwy kierunek rzutowania* na *plaszczynę obserwacyjną* $P=\delta(w,\{p_1,p_2\})$.

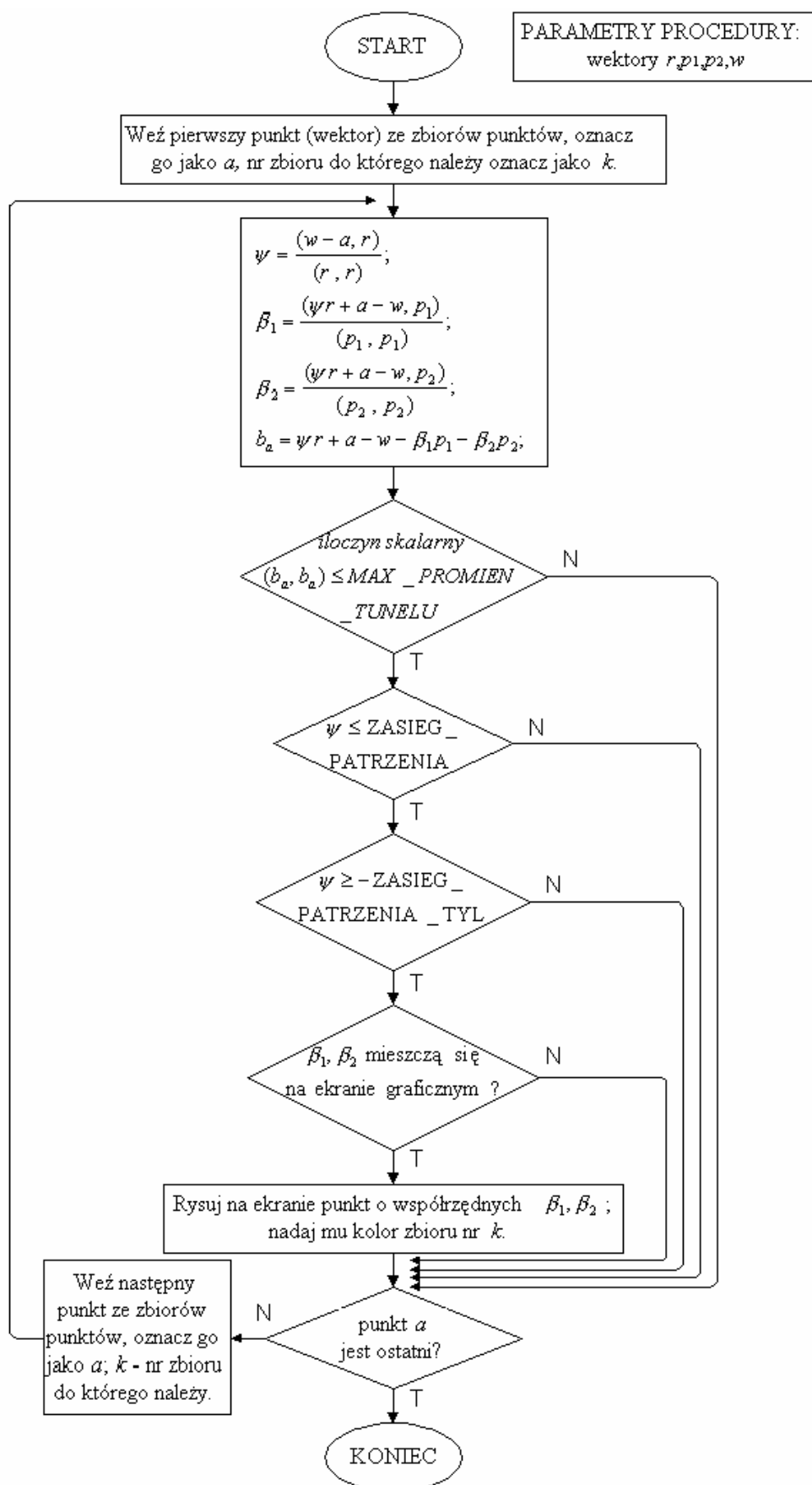
Aby *punkt obserwowany* a był widoczny na *plaszczynie obserwacyjnej* P w miejscu określonym przez *położenie rzutu punktu obserwowanego* a , muszą być dodatkowo spełnione następujące warunki:

1) iloczyn skalarny (b_a, b_a) mniejszy od ustalonego MAKSYMALNEGO PROMIENIA TUNELU.

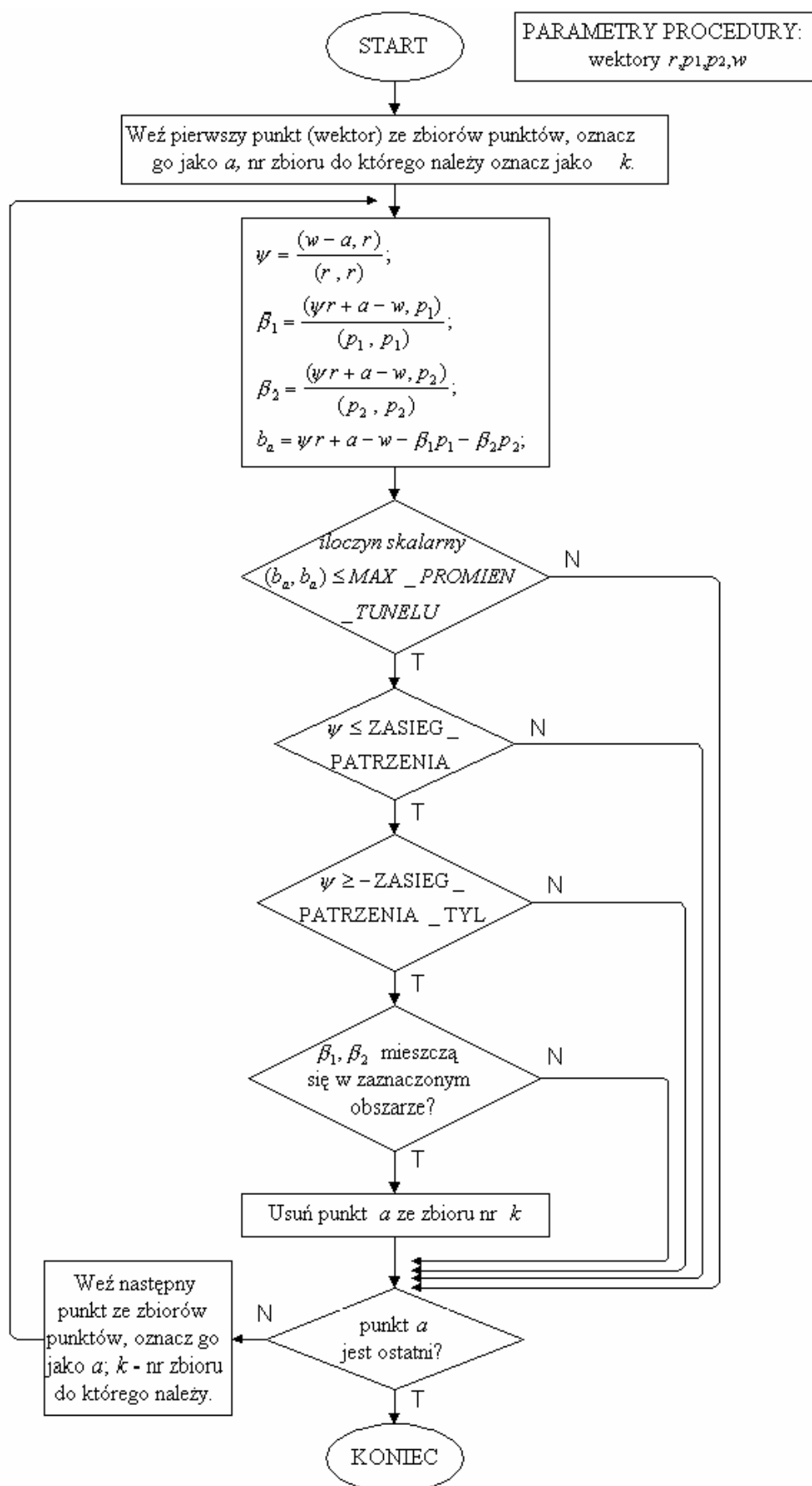
2) *punkt obserwowany* a nie może się znajdować przed *plaszczyną obserwacyjną*, w odległości liczonej w kierunku r większej od parametru ZASIĘG PATRZENIA.

3) *punkt obserwowany* a nie może się znajdować za *plaszczyną obserwacyjną*, w odległości liczonej w kierunku r większej od parametru ZASIĘG PATRZENIA TYŁ.

Na rysunku 7.1 przedstawiono schemat blokowy procedury rysującej zbiory punktów. Procedura ta jest wywoływana po każdej zmianie maksymalnego *promienia tunelu*, zasięgu patrzenia, powiększenia oraz jednego z wektorów w,p_1,p_2,r .



Rysunek 7.1. Schemat blokowy procedury rysującej zbiory punktów.



Rysunek 7.2. Procedura usuwająca punkty znajdujące się w zaznaczonym do usunięcia obszarze.

7.1.4. USUWANIE PUNKTÓW

W celu usunięcia punktów które widoczne są wewnątrz zaznaczonego do usunięcia obszaru, należy dla każdego punktu a sprawdzić następujące warunki:

1) iloczyn skalarny (b_a, b_a) mniejszy od ustalonego MAKSYMALNEGO PROMIENIA TUNELU.

2) *punkt obserwowany a* nie może się znajdować przed płaszczyzną obserwacyjną, w odległości liczonej w kierunku r większej od parametru ZASIĘG PATRZENIA.

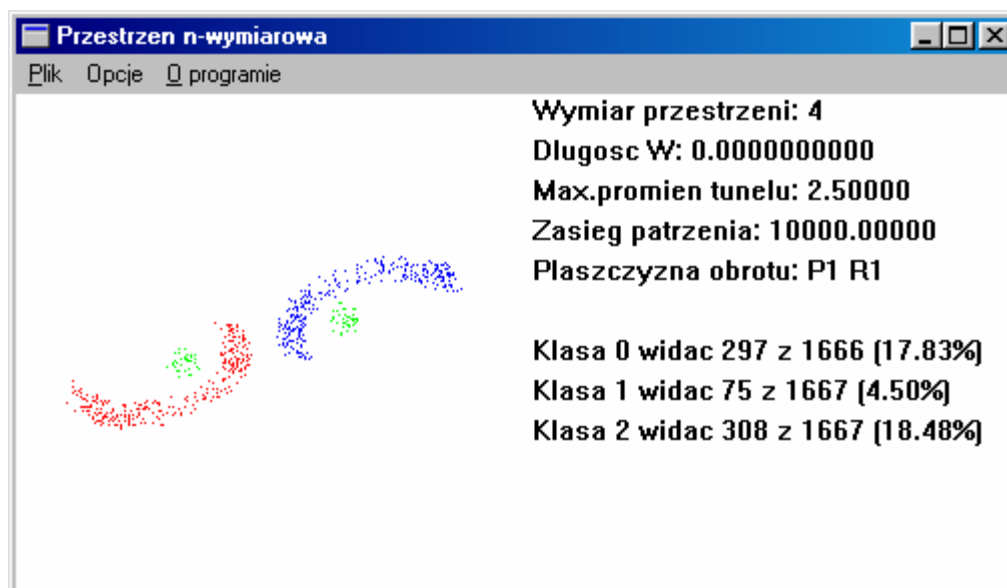
3) *punkt obserwowany a* nie może się znajdować za płaszczyzną obserwacyjną, w odległości liczonej w kierunku r większej od parametru ZASIĘG PATRZENIA TYŁ.

4) położenie rzutu punktu obserwowanego a na płaszczyźnie obserwacyjnej P musi się znajdować wewnątrz zaznaczonego do usunięcia obszaru.

Usuujemy te punkty które spełniają wszystkie warunki. Rysunek 7.2 przedstawia schemat blokowy procedury usuwającej punkty.

7.2. SPOSÓB UŻYTKOWANIA

Niżej opisany system został opracowany w oparciu o teorię z rozdziału 3 oraz rozdziału 6. Służy on do oglądania dowolnych zbiorów punktów, których łączna liczba nie przekracza 5000 a wymiar nie przekracza 7. Jest napisany w języku C, przygotowany do pracy w systemie Windows, skompilowany w środowisku Borland C++. Pracę z systemem rozpoczynamy od wczytania pliku z opisem zbiorów punktów.



Rysunek 7.3. Wygląd okna systemu składającego się z dwóch części: graficznej i tekstowej.

Parametry pracy możemy zmienić przy pomocy opcji PARAMETRY. Poruszanie się po n -wymiarowej przestrzeni w celu zmiany punktu widzenia, następuje poprzez użycie odpowiednich klawiszy. Okno systemu składa się z dwóch części: okna graficznego, które służy do przedstawiania wyglądu oglądanych zbiorów punktów oraz okna tekstowego, na którym pojawiają się pewne informacje tekstowe.

7.2.1. DANE WEJŚCIOWE

Opis zbiorów punktów które chcemy oglądać, wczytywany jest z pliku o rozszerzeniu „.dat” w którym informacje zapisane są w następującym formacie:

1) nagłówek:

- 2** - (wartość typu integer) stała wynosząca dwa, oznacza że plik opisuje zbiory punktów,
- n** - (wartość typu integer) wymiar przestrzeni z punktami (maksymalnie 7),
- k** - (wartość typu integer) liczba wszystkich punktów (maksymalnie 5000).

2) parametry określające k punktów:

- punkt 1** - (n wartości typu float) współrzędne punktu nr 1,
- nr klasy punktu 1** - (wartość typu integer) numer zbioru do którego należy punkt nr 1,
- punkt 2** - (n wartości typu float) współrzędne punktu nr 2,
- nr klasy punktu 2** - (wartość typu integer) numer zbioru do którego należy punkt nr 2,
- ...
- punkt k** - (n wartości typu float) współrzędne punktu nr k ,
- nr klasy punktu k** - (wartość typu integer) numer zbioru do którego należy punkt nr k ,

gdzie numer zbioru zawiera się w przedziale od 0 do 9. Jak łatwo zauważyć, plik ma poprawny format jeśli po trzech wartościach typu integer zawiera k bloków danych a w każdym n wartości typu float i jedną typu integer. Przykładowa procedura generująca plik z punktami zawartymi w tablicy struktur **PUNKT**(typu **struct TYP_PUNKT** opisanego w punkcie 7.1.1) wygląda następująco:

```
int zapisz_plik(char nazwa[])
{
    float wx;
    int i,lp,var_d;
    FILE *w_pliku;

    w_pliku= fopen(nazwa,"wb");
    if (w_pliku==NULL) return 1;
```

```

fprintf(w_pliku,"%d\n",2);           // typ obiektów
fprintf(w_pliku,"%d\n",WYMIAR);      // liczba wymiarów
fprintf(w_pliku,"%d\n",LICZBA_PKTOW); // liczba punktów
for (lp=0 ; lp<LICZBA_PKTOW; lp++ )
{
    for(i=0;i<WYMIAR;i++)
    {
        wx=PUNKT[lp].WSP.X[i];
        fprintf(w_pliku,"%f\n",wx);
    }
    war_d=PUNKT[lp].NR_KLASY;
    fprintf(w_pliku,"%d\n",war_d);
}

fclose(w_pliku);
return 0;
}

```

Wczytanie pliku z danymi wejściowymi następuje poprzez wybranie z głównego menu opcji PLIK a następnie CZYTAJ.

7.2.2. PARAMETRY

Wybierając w menu opcję PARAMETRY możemy zmieniać pewne ustawienia programu, mianowicie:

1) KOLOR TŁA – zmieniając ten parametr możemy wybrać białe lub czarne tło, na którym przedstawiane będą zbiory punktów.

2) SKOK OBROTU – parametr reprezentujący kąt obrotu o jaki zmieni się „kierunek patrzenia” w wyniku naciśnięcia jednego z klawiszy przyporządkowanych takiej zmianie.

3) SKOK PRZESUNIĘCIA – określa wielkość przemieszczenia obserwatora w wyniku użycia jednego z klawiszy powodujących zmianę jego położenia.

4) SKALA – parametr określający współczynnik powiększenia obserwowanego obrazu.

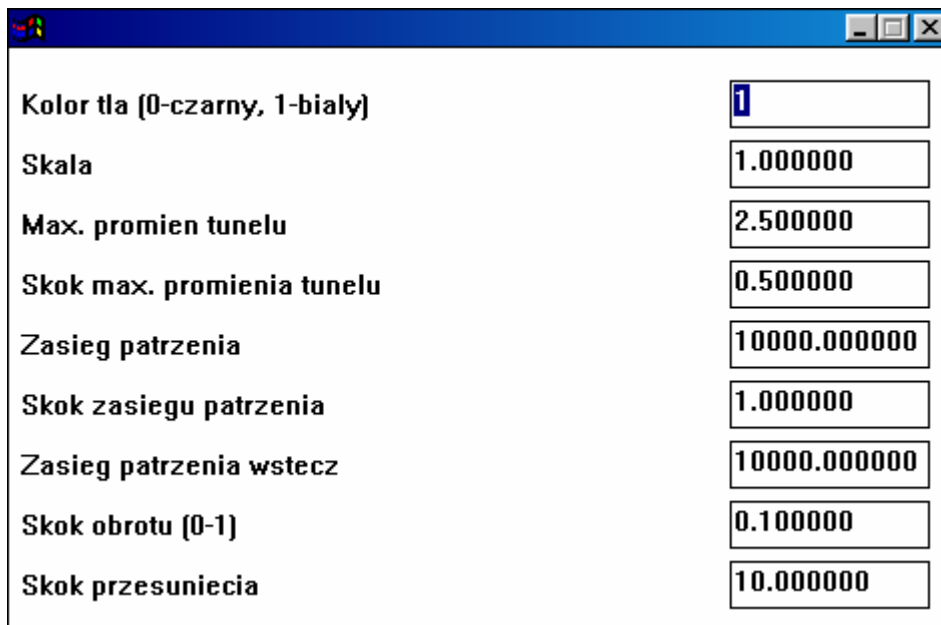
5) MAX. PROMIEŃ TUNELU – widoczne będą tylko punkty a , dla których wartość iloczynu skalarnego (b_a, b_a) jest mniejsza od tego parametru.

6) SKOK PROMIENIA TUNELU - określa wielkość zmiany parametru MAX. PROMIEŃ TUNELU w wyniku użycia jednego z klawiszy powodujących tą zmianę.

7) ZASIĘG PATRZENIA - aby punkt obserwowany a był widoczny, nie może się znajdować przed płaszczyzną obserwacyjną, w odległości liczonej w kierunku r większej od tego parametru.

8) SKOK ZASIĘGU PATRZENIA - określa wielkość zmiany parametru ZASIĘG PATRZENIA w wyniku użycia jednego z klawiszy powodujących tą zmianę.

9) ZASIĘG PATRZENIA WSTECZ – aby *punkt obserwowany a* był widoczny, nie może się znajdować za płaszczyzną obserwacyjną, w odległości liczonej w kierunku r większej od tego parametru.



Kolor tła (0-czarny, 1-biały)	1
Skala	1.000000
Max. promień tunelu	2.500000
Skok max. promienia tunelu	0.500000
Zasięg patrzenia	10000.000000
Skok zasięgu patrzenia	1.000000
Zasięg patrzenia wstecz	10000.000000
Skok obrotu (0-1)	0.100000
Skok przesunięcia	10.000000

Rysunek 7.4. Wygląd okna wywoływanego w celu zmiany parametrów.

7.2.3. FUNKCJE KŁAWISZY

Poprzez użycie odpowiednich klawiszy możemy wywoływać określone akcje, mianowicie:

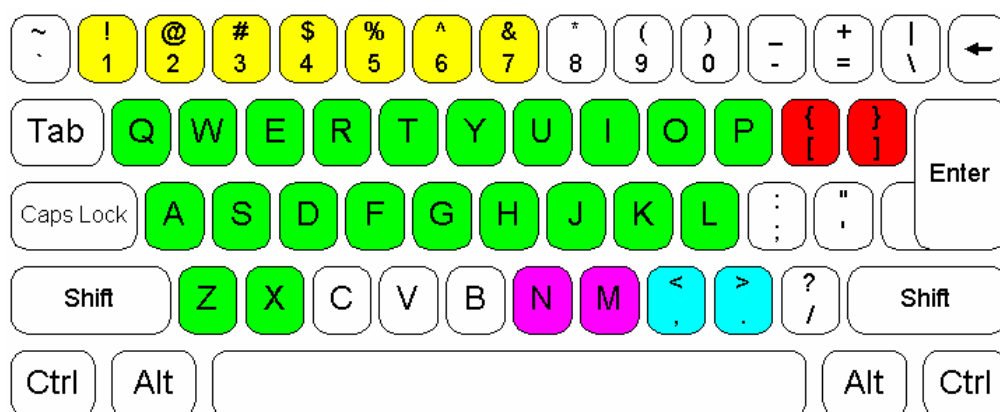
1) Zmiana maksymalnego promienia tunelu - zmiana następuje poprzez wciśnięcie klawisza ze znakiem „przecinek” (zmniejszenie parametru MAX. PROMIENŃ TUNELU) lub klawisza ze znakiem „kropka” (zwiększenie parametru MAX. PROMIENŃ TUNELU). Wartość zmiany, która następuje przy jednokrotnym użyciu klawisza, zawarta jest w parametrze SKOK MAX. PROMIENIA TUNELU.

2) Powiększenie i pomniejszenie obrazu - następuje poprzez wciśnięcie klawisza ze znakiem „N” (pomniejszenie obrazu) lub klawisza ze znakiem „M” (powiększenie obrazu). Współczynnik zmiany, która następuje przy jednokrotnym użyciu klawisza wynosi 0.9 dla pomniejszenia i 1.1 dla powiększenia.

3) Zmiana zasięgu patrzenia – można ją wywołać poprzez wciśnięcie klawisza ze znakiem „n” (zmniejszenie parametru ZASIĘG PATRZENIA) lub klawisza ze znakiem „m”

(zwiększenie parametru ZASIĘG PATRZENIA). Wartość zmiany, która następuje przy jednokrotnym użyciu klawisza, zawarta jest w parametrze SKOK ZASIĘGU PATRZENIA.

4) Poruszanie się po n -wymiarowej przestrzeni – sposób i rodzaje poruszania są dokładnie takie same jak już wcześniej opisane w punkcie 4.2.3.

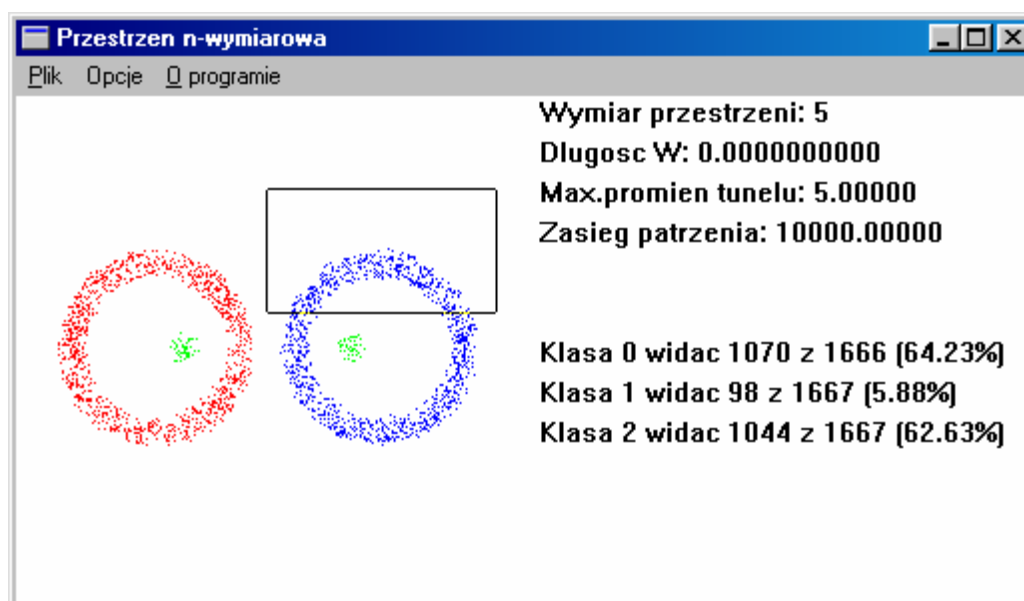


Rysunek 7.5. Kolorami oznaczono aktywne klawisze. (1) kolor fioletowy – klawisze służące zmianie zasięgu patrzenia oraz powiększaniu i pomniejszaniu obrazu, (2) kolor niebieski – zmiana maksymalnego promienia tunelu oraz zmiana położenia wzdłuż kierunku rzutowania r , (3) kolor żółty – zmiana położenia wzdłuż osi współrzędnych, (4) kolor czerwony – zmiana położenia wzdłuż osi płaszczyzny obserwacyjnej, (5) kolor zielony – zmiana „kierunku patrzenia”.

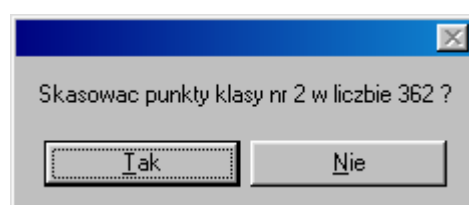
7.2.4. USUWANIE PUNKTÓW

Zdarza się, że z różnych punktów widzenia niektóre fragmenty zbiorów zachodzą na siebie i nie możemy bezpośrednio stwierdzić, czy rzeczywiście niektóre fragmenty zbiorów zachodzą na siebie czy tylko się przesłaniają. Wtedy korzystne jest usunięcie części zbioru punktów w ten sposób, by można było z innego punktu widzenia dostrzec pewne cechy obserwowanych zbiorów. Oczywiście nie chodzi tutaj o usuwanie pojedynczych punktów, lecz obszarów z punktami należącymi do tylko jednego zbioru. Możliwość usunięcia takiego obszaru oznacza, że można go oddzielić od pozostałych zbiorów a więc nie zachodzi na inne zbiory. W celu usunięcia punktów znajdujących się w danym obszarze należy:

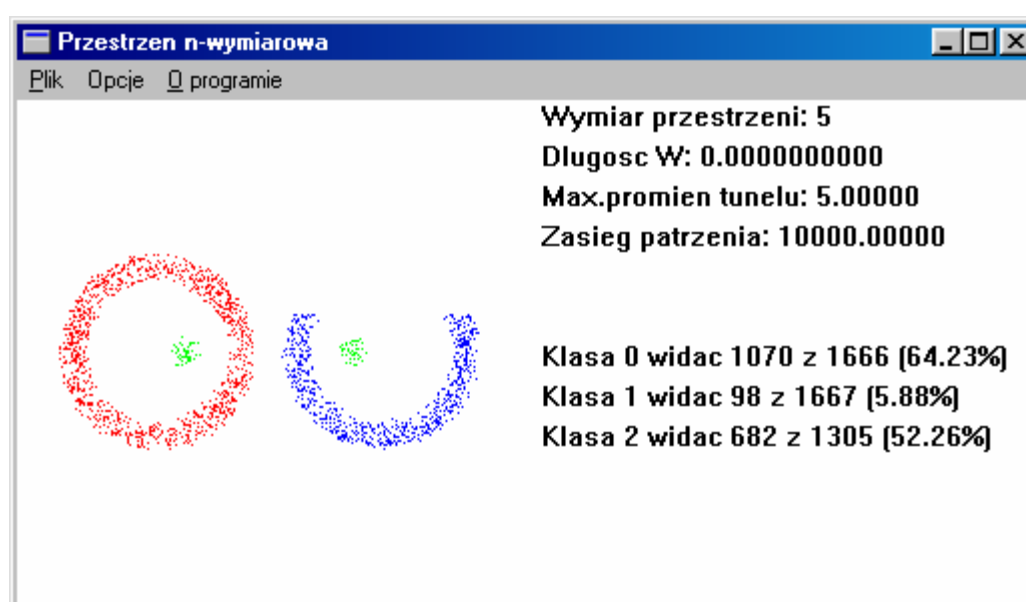
- 1) przesunąć kursor myszy w oknie graficznym w okolice lewego górnego rogu usuwanego obszaru punktów,
- 2) wcisnąć lewy przycisk myszy,
- 3) trzymając wciśnięty lewy przycisk myszy, przesunąć kursor myszy w okolice prawego dolnego rogu usuwanego obszaru punktów. W trakcie przesuwania będzie widoczna ramka obejmująca zaznaczany do usunięcia obszar,
- 4) zwolnić lewy przycisk myszy - pojawi się informacja dotycząca liczby punktów znajdujących się w zaznaczonym obszarze z pytaniem czy je usunąć,



Rysunek 7.6. Przedstawiono ramkę obejmującą usuwany obszar punktów, widoczną w trakcie przeciągania kursora myszy.



Rysunek 7.7. Pytanie pojawiające się po zaznaczeniu obszaru z punktami do usunięcia.



Rysunek 7.8. Sytuacja z rysunku 7.6 po usunięciu punktów.

5) na zadane pytanie odpowiedzieć „Tak”.

Na rysunku 7.8 przedstawiono przykład z rysunku 7.6 po usunięciu punktów znajdujących się w zaznaczonym obszarze.

7.2.5. OKNO TEKSTOWE

W oknie tekstowym pojawiają się następujące informacje:

- WYMIAR PRZESTRZENI – określa liczbę wymiarów przestrzeni w której znajdują się obserwowane zbiory punktów,
- DŁUGOŚĆ W – określa odległość płaszczyzny obserwacyjnej od środka układu współrzędnych,
- MAX.PROMIEŃ TUNELU – wyświetla wartość parametru MAX. PROMIEŃ TUNELU,
- ZASIĘG PATRZENIA – przedstawia wartość parametru ZASIĘG PATRZENIA,
- PŁASZCZYZNA OBROTU – przedstawia parę wektorów, które brały udział w ostatniej zmianie „kierunku patrzenia”,
- KLASA i WIDAĆ k Z m – wyświetla dla każdego zbioru punktów numer i , liczbę punktów widocznych k oraz liczbę wszystkich punktów m . Informacja ta ma istotne znaczenie, bowiem na jej podstawie będziemy mogli stwierdzić czy w określonej sytuacji wszystkie punkty danego zbioru są widoczne.

7.2.6. OKNO GRAFICZNE

W tym oknie pojawia się wygląd oglądanych zbiorów punktów. Wielkość okna graficznego możemy zmieniać rozciągając okno systemu kursorem myszy.

7.2.7. POŁĄCZENIE SYSTEMÓW

Powyższy system połączono z systemem opisanym w rozdziale 4 w jeden system działający w dwóch możliwych trybach. Tryb pracy (rysowanie brył bądź zbiorów punktów) wybierany jest automatycznie na podstawie formatu pliku wejściowego.

8. PODSUMOWANIE I WNIOSKI

8.1. ZREALIZOWANE ZADANIA

W ramach pracy zrealizowano następujące zadania:

1) Powstał model matematyczny, rozwiązujący problem wizualizacji wielowymiarowych brył wypukłych oraz wielowymiarowych zbiorów danych dyskretnych. Model ten nie był wzorowany na żadnym znanym opracowaniu literaturowym.

2) Napisano pakiet oprogramowania, pozwalający wizualizować wielowymiarowe bryły wypukłe oraz wielowymiarowe zbiory danych dyskretnych.

3) Przeprowadzono doświadczenia polegające na przedstawieniu na ekranie komputera przykładowych wielowymiarowych brył wypukłych. Przeprowadzono również doświadczenia polegające na przedstawieniu na ekranie komputera przykładowych wielowymiarowych zbiorów danych dyskretnych. Zebrane wyniki doświadczeń wydaje się że wnoszą nowe informacje na temat jakościowych cech obiektów wielowymiarowych.

8.2. WYNIKI DOŚWIADCZEŃ

Przeprowadzone eksperymenty pokazały, że przy pomocy opisanej metody wizualizacji można zaobserwować pewne istotne jakościowe cechy obserwowanych zbiorów punktów, mianowicie:

1) Można stwierdzić, że dany zbiór da się w rozważanej przestrzeni oddzielić od pozostałych, czyli że dany zbiór nie zachodzi na inne (przykłady od 6.3.1 do 6.3.4). Daje to podstawy do poszukiwań skutecznego algorytmu potrafiącego rozpoznać, czy dany punkt należy do badanego zbioru.

2) Można zauważyć w zbiorze wielowymiarowych danych punkty podejrzane o to, że są zakłóceniami (przykład 6.3.1). Dzięki temu wiadomo, które punkty należy pominąć w dalszej analizie. Pozwala to uniknąć sytuacji w której na podstawie zakłóceń wyciągnięte zostają błędne wnioski.

3) Można zauważyć brak spójności zbioru wielowymiarowych danych (przykład 6.3.1). Cecha ta jest bardzo istotna, ponieważ pozwala przyjąć możliwość wystąpienia pomiędzy spójnymi obszarami danego zbioru punktów, obszarów przynależących do innego zbioru punktów.

4) Fakt, że dany zbiór można oddzielić od pozostałych można stwierdzić również wtedy, gdy dany zbiór jest ze wszystkich stron otoczony innym zbiorem punktów (przykład 6.3.2)

5) Nawet w sytuacji gdy zbiory „obejmują się” możemy stwierdzić, że dany zbiór można oddzielić od pozostałych (przykład 6.3.4), co może być podstawą do klasyfikacji wielowymiarowych danych.

W przypadku wielowymiarowych brył możemy stwierdzić kształt oraz liczbę widocznych części *ścian* bryły. W trakcie oglądania bryły już 4-wymiarowej z różnych stron, powstaje wrażenie że zmienia ona kształt (rysunki 3.4 do 3.9). Jednak podobne wrażenie miałby człowiek oglądając sześcián 3-wymiarowy z różnych stron, gdyby nie znał jego wyglądu (sześcián 3-wymiarowy z odpowiedniego punktu widzenia wygląda jak kwadrat, z innego jak dwa sklezione prostokąty a jeszcze z innego jak trzy sklezione równoległoboki). Zwrócono uwagę na fakt, że w przypadku kostki czterowymiarowej jednocześnie można było zobaczyć maksymalnie 4 *ściany*, natomiast w przypadku kostki siedmiowymiarowej jednocześnie można było zobaczyć maksymalnie 7 *ścian*. Stanowi to pewną indywidualną cechę jakościową obserwowanych obiektów, różniącą je od siebie.

Zaprezentowane wyniki w pełni potwierdzają, że **stosując zaproponowane w pracy metody matematyczne można wizualizować na ekranie komputera obiekty zdefiniowane formalnie lub empirycznie w przestrzeniach wielowymiarowych, co pozwala na jakościową ocenę struktury danych wielowymiarowych.**

Tym samym teza pracy została wykazana.

LITERATURA

- [1] Aldrich C., Visualization of transformed multivariate data sets with autoassociative neural networks. *Pattern Recognition Letters*, Volume: 19, Issue: 8, June, 1998, pp. 749-764.
- [2] Asimov D. „The Grand Tour: A Tool for Viewing Multidimensional Data.”, *SIAM Journal of Scientific and Statistical Computing*, 1985, pp. 128-143, vol. 6, No. 1.
- [3] Assa J., Cohen-Or D., Milo T., RMAP: a system for visualizing data in multidimensional relevance space. [Journal Paper] *Visual Computer*, vol.15, no.5, 1999, pp.217-34. Publisher: Springer-Verlag, Germany.
- [4] Assa J., Cohen-Or D., Milo T., Displaying data in multidimensional relevance space with 2D visualization maps. [Conference Paper] *Proceedings. Visualization '97 (Cat. No.97CB36155). IEEE. 1997*, pp.127-34, 534. New York, NY, USA.
- [5] Becker R.A., Cleveland W.S., Wilks A.R., Dynamic graphics for data analysis. *Statistical Science* 2, 1987, pp.355-395.
- [6] Buja A., Asimov D. „Grand Tour Methods: An Outline.” *Computing Science and Statistics*, 1985, pp. 63-67, vol. 17.
- [7] Buja A., Cook D., Asimov D., Hurley C., Dynamic Projections in High-Dimensional Visualization: Theory and Computational Methods. *AT&T Research Labs Technical Report*, 1998.
- [8] Buja A., Swayne D.F., Littman M.L., XGVis: interactive data visualization with multidimensional scaling. *Journal of Computational and Graphical Statistics*, 1998, To appear.
- [9] Carr D. B., Wegman E. J., Luo Q. ExplorN: Design Considerations Past and Present. *Center for Computational Statistics, George Mason University*, no. 129, 1996.
- [10] Chatterjee A., Das P.P., Bhattacharya S., Visualization in linear programming using parallel coordinates. *Pattern Recognition* 26(11), 1993, pp.1725-1736.
- [11] Cleveland W.S., McGill R., The many faces of a scatterplot. *Journal of the American Statistical Association* 79, 1984, pp.807-822.
- [12] Cook D., Buja A., Cabrera J., Hurley C., Grand Tour and Projection Pursuit. *Journal of Computational and Graphical Statistics*, 1995, pp. 155-172, vol. 4, no. 3.
- [13] Eick Stephen G., Wills Graham J., High interaction graphics. *European Journal of Operational Research*, Volume: 81, Issue: 3, March 16, 1995, pp. 445-459.

[14] Gennings C., Dawson K.S., Carter W.H., Jr. Myers R.H., Interpreting plots of a multidimensional dose-response surface in a parallel coordinate system. *Biometrics* 46, 1990, pp. 719-735.

[15] Hardle W., Klinke S., Turlach B. A. XploRe: An Interactive Statistical Computing Environment. *Springer-Verlag, New York* 1995.

[16] Hartigan J.A., Kleiner B., Mosaic for Contingency Tables. In: *Computer Science and Statistics: Proceedings of the 13th Symposium on the Interface*. New York, 1981, Springer Verlag, pp. 268-273.

[17] Heike Hofmann, Exploring categorical data: interactive mosaic plots. *Metrika* 51, Springer-Verlag, 2000, pp. 11-26.

[18] Hurley C, Buja A. „Analyzing high-dimensional data with motion graphics.” [Journal Paper] *SIAM Journal on Scientific & Statistical Computing*, vol.11, no.6, Nov. 1990, pp.1193-1211. USA.

[19] Inselberg A., The plane with parallel coordinates. *Visual Computer* 1, 1985, pp. 69-91.

[20] Inselberg A., Dimsdale B., Multidimensional lines I: representation. *SIAM J. Appl. Math.* 54 (2), 1994, pp. 559-577.

[21] Jain A.K., Mao J., Artificial neural network for non-linear projection of multivariate data. In: *Proc. IEEE Internat. Joint Conf. On Neural Networks, Baltimore, 1992, MD, 3, pp.335-340*.

[22] Keller P.R., Keller M.W., Visual Cues-Practical Data Visualization. *IEEE Computer Soc. Press, Silver Spring*, 1993.

[23] Kraaijveld M., Mao J., Jain A.K., A nonlinear projection method based on Kohonen's topology preserving maps. *IEEE Trans. Neural Networks* 6 (3), 1995, pp. 548-559.

[24] Li Weihua, Yue H. Henry, Valle-Cervantes Sergio, Qin S. Joe, Recursive PCA for adaptive process monitoring. *Journal of Process Control, Volume: 10, Issue: 5, October, 2000, pp. 471-486*.

[25] Mao J., Jain A.K., Artificial neural networks for feature extraction and multivariate data projection. *IEEE Trans. Neural Networks* 6 (2), 1995, pp. 296-317.

[26] Qi R., Cook D., Kliemann W., Vittal V. Visualization of Stable Manifolds and Multidimensional Surfaces in the Analysis of Power Systems Dynamics. *Journal of Nonlinear Science*, 2000, pp. 175-195, vol. 10.

[27] Shuo-Yan Chou, Shih-Wei Lin, Chia-Shin Yeh, Cluster identification with parallel coordinates. *Pattern Recognition Letters* 20, 1999, pp.565-572.

[28] Sobol M.G., Klein G., New graphics as computerized displays for human information processing. *IEEE Trans. Systems Man Cybernet.* 19 (4), 1989, pp. 893-898.

[29] Sung-Soo Kim, Sunhee Kwon, Dianne Cook, Interactive visualization of hierarchical clusters using MDS and MST. *Metrika* 51, Springer-Verlag 2000, pp. 39-51.

[30] Swayne D. F., Cook D., Buja A. XGobi: Interactive Dynamic Graphics in the X Window System. *Journal of Computational and Graphical Statistics*, 1998, pp. 113-130, vol. 7, no. 1.

[31] Tadeusiewicz R., Elementarne wprowadzenie do techniki sieci neuronowych z przykładowymi programami. *Akademicka Oficyna Wydawnicza PLJ, Warszawa 1999.*

[32] Tadeusiewicz R., Flasiński M., Rozpoznawanie obrazów. *Wydawnictwo Naukowe PWN, seria Współczesna Nauka i Technika, Informatyka, Warszawa 1991.*

[33] Tarczyński W., O jeszcze jednym sposobie oceny fundamentalnej spółki na giełdzie papierów wartościowych w Warszawie. *Wydawnictwo A.E., Klasyfikacja i analiza danych, Zeszyt 5, Wrocław 1998.*

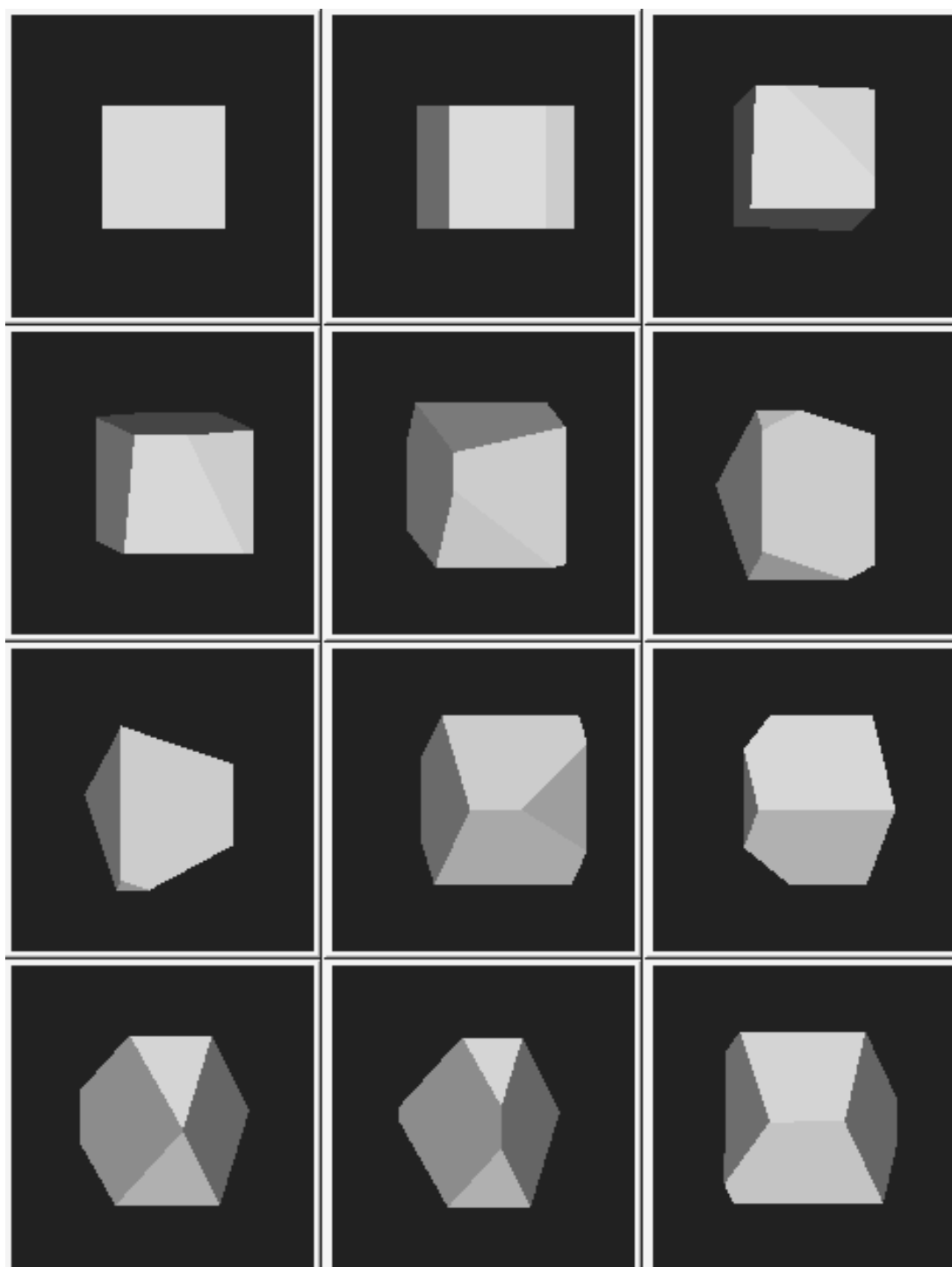
[34] Wegman E.J., Hyper-dimensional data analysis using parallel coordinates. *J. Amer. Statist. Assoc.* 85 (411), 1990, pp. 664-675.

[35] Wegman E., The Grand Tour in k -Dimensions. *Center for Computational Statistics, George Mason University, no. 68, 1991.*

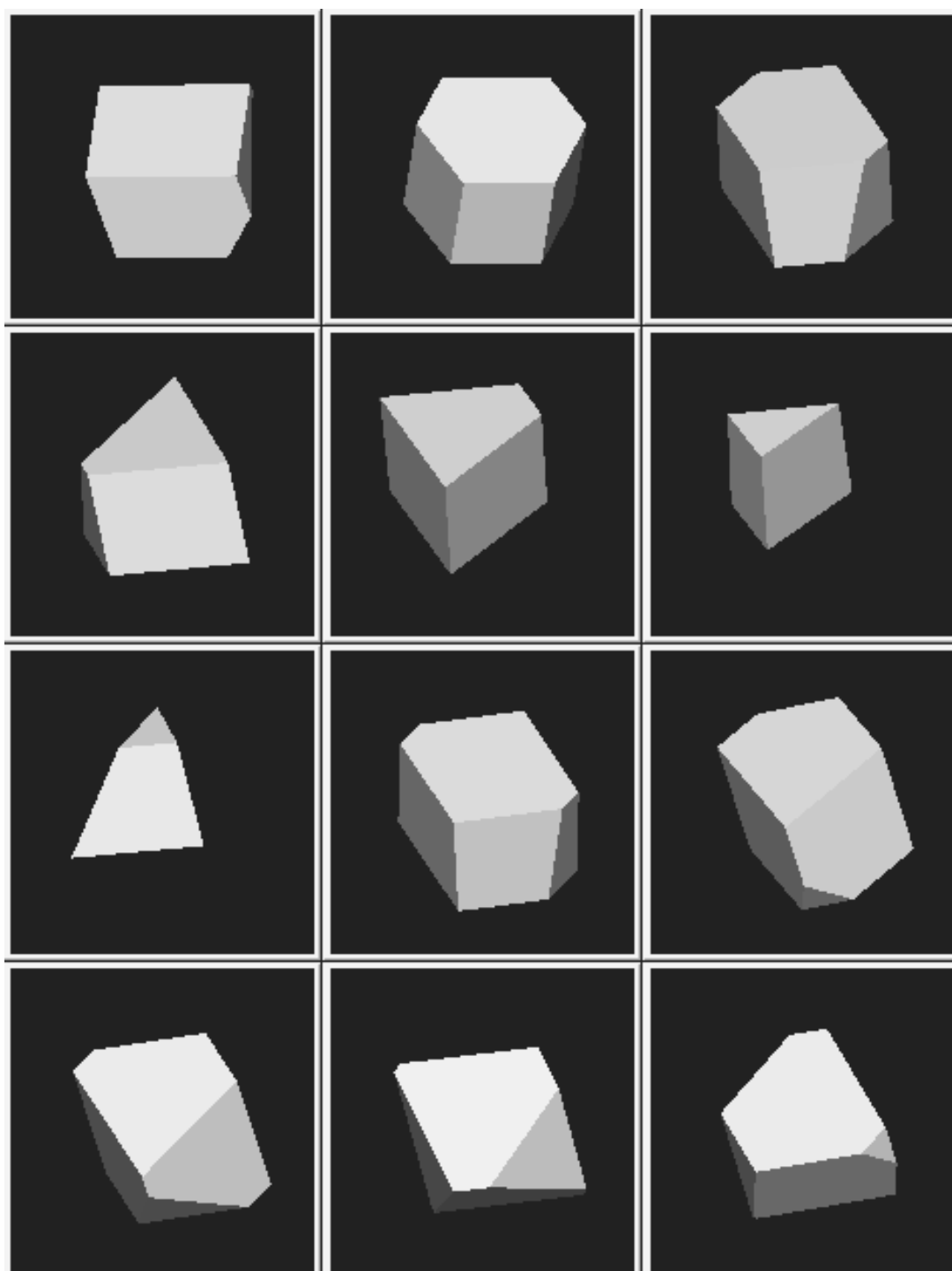
[36] Zaborski A., Przegląd zastosowań skalowania wielowymiarowego w rozwiązywaniu problemów marketingowych. *Wydawnictwo A.E., Klasyfikacja i analiza danych, Zeszyt 4, Wrocław 1997.*

DODATEK A

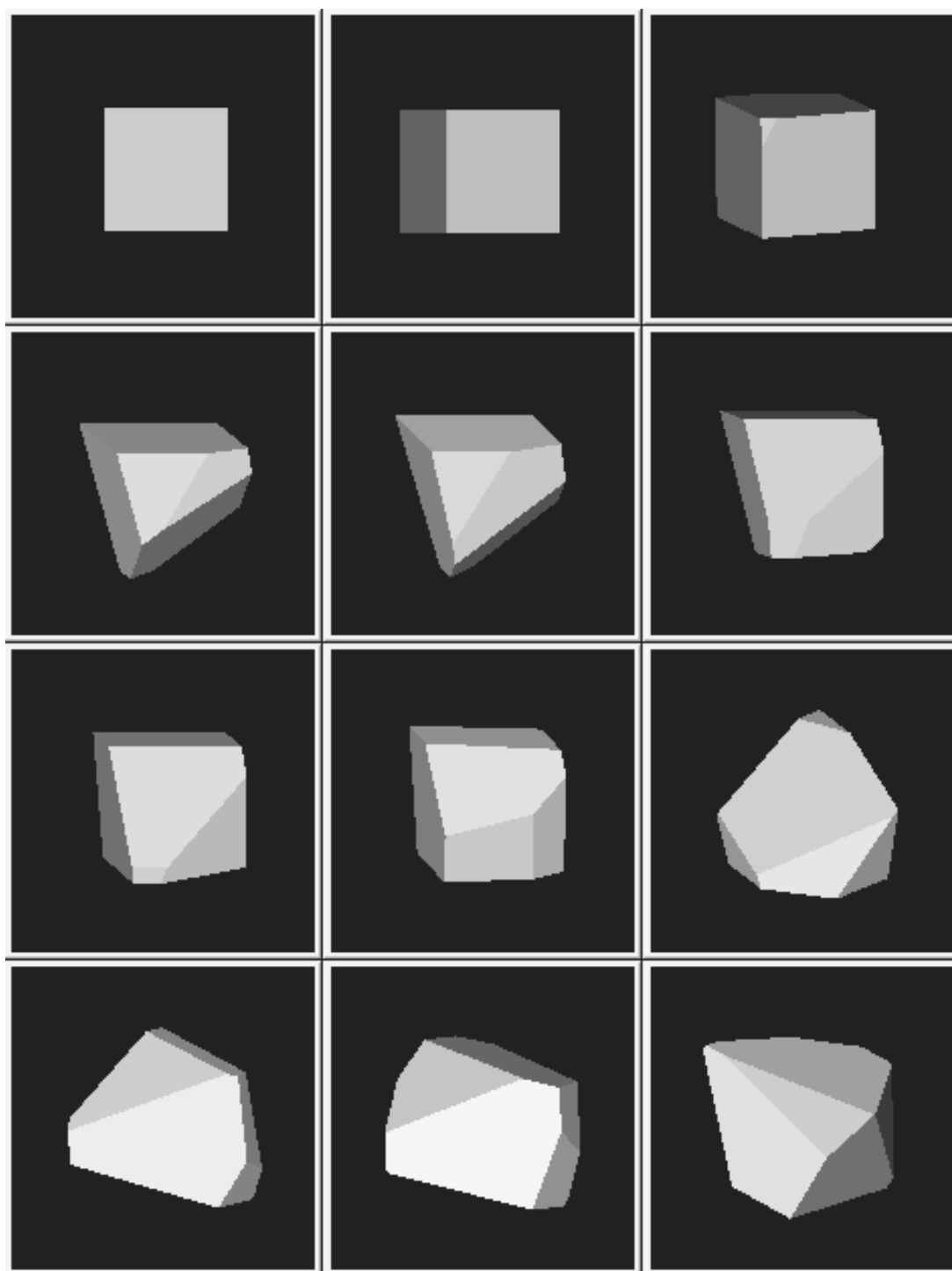
Przykładowe widoki brył wypukłych:



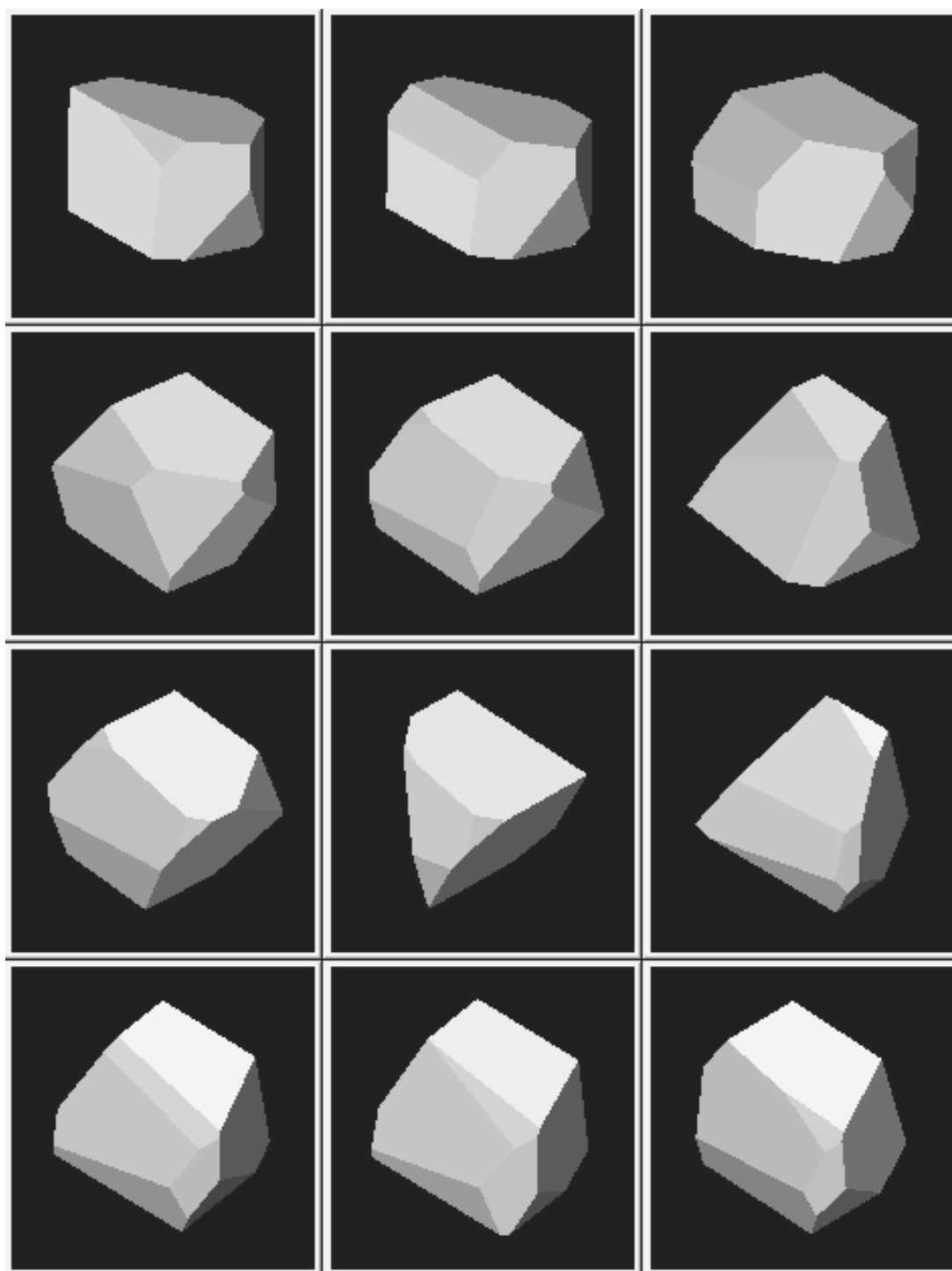
Rysunek A.1. Kostka 4-wymiarowa oglądana z różnych stron, przy różnych ustawieniach kierunku rzutowania r .



Rysunek A.2. Kostka 4-wymiarowa oglądana z różnych stron, przy różnych ustawieniach kierunku rzutowania r .



Rysunek A.3. Kostka 7-wymiarowa oglądana z różnych stron, przy różnych ustawieniach kierunku rzutowania r .



Rysunek A.4. Kostka 7-wymiarowa oglądana z różnych stron, przy różnych ustawieniach kierunku rzutowania r .